



2012.  
GODINA  
LV



# GRAĐEVINSKI MATERIJALI I KONSTRUKCIJE

# 3

# BUILDING MATERIALS AND STRUCTURES

ČASOPIS ZA ISTRAŽIVANJA U OBLASTI MATERIJALA I KONSTRUKCIJA  
JOURNAL FOR RESEARCH OF MATERIALS AND STRUCTURES



DRUŠTVO ZA ISPITIVANJE I ISTRAŽIVANJE MATERIJALA I KONSTRUKCIJA SRBIJE  
SOCIETY FOR MATERIALS AND STRUCTURES TESTING OF SERBIA

Odlukom Skupštine ***Društva za ispitivanje materijala i konstrukcija***, održane 19. aprila 2011. godine u Beogradu, promenjeno je ime časopisa **Materijali i konstrukcije** i od sada će se časopis publikovati pod imenom **Građevinski materijali i konstrukcije**.

According to the decision of the Assembly of the ***Society for Testing Materials and Structures***, at the meeting held on 19 April 2011 in Belgrade the name of the Journal **Materijali i konstrukcije** (Materials and Structures) is changed into **Building Materials and Structures**.

Professor Radomir Folic  
Editor-in-Chief

# GRAĐEVINSKI MATERIJALI I KONSTRUKCIJE

# BUILDING MATERIALS AND STRUCTURES

ČASOPIS ZA ISTRAŽIVANJA U OBLASTI MATERIJALA I KONSTRUKCIJA  
JOURNAL FOR RESEARCH IN THE FIELD OF MATERIALS AND STRUCTURES

---

## INTERNATIONAL EDITORIAL BOARD

Professor **Radomir Folić**, Editor in-Chief  
Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, Serbia  
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija  
e-mail: [folic@uns.ac.rs](mailto:folic@uns.ac.rs)

Assoc. professor **Mirjana Malešev**, Deputy editor  
Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad,  
Serbia  
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija  
e-mail: [miram@uns.ac.rs](mailto:miram@uns.ac.rs)

Dr **Ksenija Janković**  
Institute for Testing Materials, Belgrade, Serbia  
Institut za ispitivanje materijala, Beograd, Srbija

Dr **Jose Adam, ICITECH**  
Department of Construction Engineering, Valencia,  
Spain.

Professor **Radu Banchila**  
Dep. of Civil Eng. „Politehnica“ University of  
Timisoara, Romania

Professor **Dubravka Bjegović**  
Civil Engineering Institute of Croatia, Zagreb, Croatia

Assoc. professor **Meri Cvetkovska**  
Faculty of Civil Eng. University "St Kiril and Metodij",  
Skopje, Macedonia

Professor **Michael Forde**  
University of Edinburgh, Dep. of Environmental Eng.  
UK

Dr **Vladimir Gocevski**  
Hydro-Quebec, Motreal, Canada

Professor **Miklos Ivanyi**  
University of Pecs, Faculty of Engineering, Hungary.

Professor **Asterios Liolios**  
Democritus University of Thrace, Faculty of Civil Eng.,  
Greece

**Predrag Popović**  
Wiss, Janney, Elstner Associates, Northbrook, Illinois,  
USA.

Professor **Tom Schanz**  
Ruhr University of Bochum, Germany

Professor **Valeriu Stoin**  
Dep. of Civil Eng. „Poloitehnica“ University of  
Timisoara, Romania

Acad. Professor **Miha Tomazević**, SNB and CEI,  
Slovenian Academy of Sciences and Arts,

Professor **Mihailo Trifunac**, Civil Eng.  
Department University of Southern California, Los  
Angeles, USA

Lektori za srpski jezik: Dr **Miloš Zubac**, profesor

Proofreader: **Aleksandra Borojev**, profesor  
Prof. **Jelisaveta Šafranj**, Ph D

Technical editor: **Stoja Todorovic**, e-mail: [saska@imk.grf.bg.ac.rs](mailto:saska@imk.grf.bg.ac.rs)

## PUBLISHER

Society for Materials and Structures Testing of Serbia, 11000 Belgrade, Kneza Milosa 9  
Telephone: 381 11/3242-589; e-mail: [dimk@ptt.rs](mailto:dimk@ptt.rs), veb sajt: [www.dimk.rs](http://www.dimk.rs)

REVIEWERS: All papers were reviewed  
COVER: Brana "Bajina Bašta" na Drini  
Dam "Bajina Basta" on the Drina

Financial supports: Ministry of Scientific and Technological Development of the Republic of Serbia

DRUŠTVO ZA ISPITIVANJE I ISTRAŽIVANJE MATERIJALA I KONSTRUKCIJA SRBIJE  
 SOCIETY FOR MATERIALS AND STRUCTURES TESTING OF SERBIA

# GRAĐEVINSKI MATERIJALI I KONSTRUKCIJE

# BUILDING MATERIALS AND STRUCTURES

ČASOPIS ZA ISTRAŽIVANJA U OBLASTI MATERIJALA I KONSTRUKCIJA  
 JOURNAL FOR RESEARCH IN THE FIELD OF MATERIALS AND STRUCTURES

## SADRŽAJ

<b>Dragan D. MILAŠINOVIĆ</b> <b>Danica GOLEŠ</b> REOLOŠKO-DINAMIČKI MODEL OŠTEĆENJA USLED ZAMORA ZA ŠTAPOVE S VREMENSKI ZAVISNIM PONAŠANJEM <b>Originalni naučni rad</b> .....	3
<b>Vladimir SIMONCE</b> LUČNA BRANA "SV. PETKA" U R. MAKEDONIJI <b>Originalni naučni rad</b> .....	37
<b>Koce TODOROV</b> <b>Svetlana PETKOVSKA ONCEVSKA</b> NOVI POLIGONALNI HISTEREZISNI MODEL ZA SIMULIRANJE EFEKTA SUPERELASTIČNOSTI LEGURA SA SVOJSTVOM PAMĆENJA OBLIKA <b>Originalni naučni rad</b> .....	55
<b>Uputstvo autorima</b> .....	69

## CONTENTS

<b>Dragan D. MILASINOVIĆ</b> <b>Danica GOLES</b> RHEOLOGICAL-DYNAMICAL FATIGUE DAMAGE MODEL FOR TIME-DEPENDENT BEHAVIOR OF RODS <b>Original scientific paper</b> .....	3
<b>Vladimir SIMONCE</b> ARCH DAM "SV. PETKA" IN R. MACEDONIA <b>Original scientific paper</b> .....	37
<b>Koce TODOROV</b> <b>Svetlana PETKOVSKA ONCEVSKA</b> NEW POLYGONAL HYSTERETIC MODEL FOR SIMULATION OF SUPERELASTICITY EFFECT OF SHAPE MEMORY ALLOYS <b>Original scientific paper</b> .....	55
<b>Preview report</b> .....	69

CIP - Katalogizacija u publikaciji  
 Narodna biblioteka Srbije, Beograd

620.1

**GRAĐEVINSKI materijali i konstrukcije** :  
 časopis za istraživanja u oblasti materijala  
 i konstrukcija = Building Materials and  
 Structures : journal for research of  
 materials and structures / editor-in-chief  
 Radomir Folić. - God. 54, br. 1 (2011)-  
 - Beograd (Kneza Miloša 9) : Društvo za  
 ispitivanje i istraživanje materijala i  
 konstrukcija Srbije, 2011- (Novi Beograd :  
 Hektor print). - 30 cm

Tromesečno. - Je nastavak: Materijali i  
 konstrukcije = ISSN 0543-0798  
 ISSN 2217-8139 = Građevinski materijali i  
 konstrukcije  
 COBISS.SR-ID 188695820



# REOLOŠKO-DINAMIČKI MODEL OŠTEĆENJA USLED ZAMORA ZA ŠTAPOVE S VREMENSKI ZAVISNIM PONAŠANJEM

## RHEOLOGICAL-DYNAMICAL FATIGUE DAMAGE MODEL FOR TIME-DEPENDENT BEHAVIOUR OF RODS

Dragan D. MILAŠINOVIĆ  
Danica GOLEŠ

ORIGINALNI NAUČNI RAD  
ORIGINAL SCIENTIFIC PAPER  
UDK: 624.072.9.042.8 = 861

### 1 UVOD

Tokom eksploatacionog veka inženjerskih objekata, mogu se očekivati neka konstruktivna oštećenja. U današnje vreme, sve je veće interesovanje za razvoj postupaka za predviđanje inicijalnih oštećenja.

Inženjerske linijske konstrukcije su u praksi obično kompleksne, a njihov dinamički odgovor na specifične pobude može se odrediti samo približnim metodama. S druge strane, iz reološkog aspekta bitna je istorija napona i deformacija. Tako npr. prema modelu Bažant-a i Kim-a [1] za vremenski zavisne deformacije betona, ciklični deformacijski odgovor ne zavisi mnogo od oblika vremenske krive opterećenja unutar ciklusa. Zbog toga, za relativno jednostavne slučajeve i vremenski zavisne granične uslove (npr. harmonijska pobuda osnove), moguće je naći analitička rešenja koja se mogu koristiti za proveru ili ocenu rezultata numeričkog algoritma u postupku direktne integracije ili metodu modalne superpozicije. Reološko-dinamički (RDA) model za opisivanje neelastičnih deformacija sistema s jednim stepenom slobode (JSS), koji uzima u obzir uticaj odnosa minimalnog prema maksimalnom naponu ( $R$ ), koeficijenta tečenja i frekvencije opterećenja na zamorni vek linijskih elemenata (štapova), predložio je prvi pomenuti autor [5]. Ovaj model u stanju je da predvidi ponašanje štapova pri zamoru pod opterećenjem konstantne amplitude, koristeći rezultate samo nekoliko ključnih eksperimenata (videti: Milašinović [8]). Utvrđeno je da su predviđanja, dobijena na osnovu ovog modela, u dobroj saglasnosti sa eksperimentalnim podacima iz literature.

---

Prof. dr Dragan D. Milašinović, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: [ddmil@gf.uns.ac.rs](mailto:ddmil@gf.uns.ac.rs)  
dr Danica Goleš, asistent, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: [dgoles@gf.uns.ac.rs](mailto:dgoles@gf.uns.ac.rs)

### 1 INTRODUCTION

During the service life of engineering structures some structural damage can be expected. Nowadays, there is a growing interest for developing technique for prediction of incipient damage.

In practice engineering rod structures are usually complex and their dynamic response to specified inputs can be determined only by approximate methods. On the other hand, according to the model of Bažant and Kim [1] for time-dependent deformations of concrete, the cyclic strain response does not depend much on the shape of the time-load curve within the cycle. Thus, for relatively simple cases and time-dependent boundary conditions (i.e., harmonic base excitation), it is possible to find analytical solutions, which can be used to validate or evaluate the performance of the numerical algorithm used in the direct integration approach or mode superposition method. For the inelastic material deforming a single-degree-of-freedom (SDOF) rheological-dynamical (RDA) model has been proposed by the first author [5], that includes the influence of stress ratio, creep coefficient and load frequency on the fatigue life of rods. This model is capable to predict the fatigue behaviour under constant amplitude loading of rods using the results from only a few key experiments (see Milašinović [8]). Predictions from this model were found to be in good agreement with experimental data obtained from the literature.

---

Dragan D. Milašinović, PhD, Full professor, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: [ddmil@gf.uns.ac.rs](mailto:ddmil@gf.uns.ac.rs)  
Danica Goleš, PhD, Assistant, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering Subotica, Kozaračka 2a, e-mail: [dgoles@gf.uns.ac.rs](mailto:dgoles@gf.uns.ac.rs)

Projektovanje konstrukcija i elemenata koji trpe napone nesimetričnih ciklusa (uzimajući u obzir odnos napona  $R$ ), skokovite promene tokom vremena, zahteva odgovarajuću teoriju sposobnu da se nosi s bilo kojim stanjem oštećenja usled zamora. Povrh toga, većina elemenata koji se opiru visokocikličnom zamoru izložena je višeaksijalnom stanju napona. Danas je poznato više od 60 kriterijuma čvrstoće na zamor za višeaksijalno opterećenje: Macha i Sonsino [4], Macha [3]. Postoje kriterijumi loma usled zamora na bazi napona, deformacija i energije, ali nijedan opšti, široko prihvaćen kriterijum za različite materijale i uslove opterećenja. Preumont and Piéfort [9] predložili su metod frekventnog područja za ocenu oštećenja pri visokocikličnom zamoru za višeaksijalno stanje napona, izazvanih slučajnim vibracijama, direktno iz spektralne analize. Ovaj pristup zasnovan je na novoj definiciji von Mises-ovog napona kao slučajnog procesa. Degradacija čvrstoće i krutosti usled ponavljano cikličnog opterećenja u neelastičnom području naziva se niskociklični zamor. Efekat niskocikličnog zamora može se ublažiti projektovanjem konstrukcije koja je sposobna da oslobodi veliku količinu histerezisne energije u svakom ciklusu. Algoritmi za određivanje oštećenja, zasnovani na promenama relativnih prigušenja tonova, slabije su razvijeni nego pristupi zasnovani na krutosti i obliku tonova. Predstavljena RDA teorija vibracija linijskih konstrukcija u osnovi je u saglasnosti s tradicionalnom metodom modalne analize.

U radu su razmatrane dve vrste prigušenja: viskozno prigušenje u slučaju linearne analize, koje je proporcionalno krutosti i/ili masi i – u slučaju nelinearne analize – histerezisno prigušenje izazvano neelastičnim deformacijama štapa. Ustanovljeno je da, zbog niskih vrednosti, viskozno prigušenje jeste značajno ukoliko su štapne konstrukcije izložene cikličnom opterećenju relativno niskih amplituda napona, kada se javlja visokociklični zamor. Međutim, u slučaju nelinearne analize, histerezisno prigušenje je značajan faktor i smatra se parametrom oštećenja u niskocikličnom zamoru. Zakon kumulativnog oštećenja, zasnovan na niskocikličnom zamoru, dovodi do izraza za oštećenje koji su dali Cosenza i ostali [2]. Prvi autor je takođe pokazao [7] da se  $c=(E_K I_N + H' I_K)/g$ , gde su  $I_K$ ,  $I_N$ ,  $E_K$  i  $H'$  date konstante materijala u određenom vremenskom koraku, a  $g$  zapreminska težina materijala, može nazvati RDA Rayleigh-evo prigušenje, koje se zasniva na matematičko-fizičkoj analogiji između reološkog modela i dinamičkog modela s viskoznom prigušenjem, tzv. reološko-dinamičkoj analogiji (RDA). Prema osnovnim jednačinama RDA za masu –  $m=I_K I_N/g$  i krutost štapa –  $k=E_K H'/g$ , viskozno kritično prigušenje je  $c_{cr}=m/T_K^D + T_K^D k$ . Dalje, reološko ponašanje štapa može se okarakterisati jednim parametrom – dinamičkim vremenom retardacije  $T_K^D=1/w$ , što daje  $c=xwm+xk/w$ . U nelinearnoj analizi, koja uzima u obzir RDA meru oslobođene viskoelastoplastične (VEP) energije, nelinearno ponašanje je linearizovano, čime je omogućeno dobijanje odgovarajućih koeficijenata prigušenja i krutosti. Na osnovu izraza za dve vrste prigušenja, razvijen je posebno atraktivan iterativni postupak za projektovanje VEP štapova ili dampera (amortizera).

Logično proširenje RDA modela predstavlja težnju da se tačno predvidi zamorni vek štapa pod dejstvom skokovito promenljivog opterećenja, kakvom je izloženo

The design of structures and components submitted to non-symmetric (with the stress ratio  $R$  taken into account) and multi-step stress history requires a relevant prediction theory able to deal with any kind of fatigue damage condition. Moreover, most of the components that resist high cycle fatigue are subjected to multiaxial state of stress. At present, there are more than 60 criteria of fatigue strength for multiaxial loading: Macha and Sonsino [4], Macha [3]. There is stress-, strain- and energy- based fatigue failure criteria, but there is not one common, widely accepted criterion for different loading conditions and materials. Preumont and Piéfort [9] proposed a frequency domain method to estimate the high-cycle fatigue damage for multiaxial stresses caused by random vibration, directly from a spectral analysis. This approach is based on a new definition of the von Mises stress as a random process. On the other hand, the degradation of strength and stiffness under repeated inelastic cyclic loading is called low-cycle fatigue. Ensuring that the structure is able to dissipate a large amount of hysteretic energy in each cycle can minimize low-cycle fatigue effect. Damage detection algorithms based on changes in modal damping ratios are relatively less developed than stiffness and mode shape approaches. The presented RDA theory of vibrations of rod structures is essentially in correspondence with the traditional mode-component synthesis.

Two types of damping are considered here: viscous damping in the case of linear analysis, defined as stiffness and/or mass proportional and, in the case of nonlinear analysis hysteretic damping caused by inelastic deformations of a rod. Because of low values, the viscous damping was found to be important if rod structures are exposed to cyclic loading at relatively low load amplitudes, when high cycle fatigue occurs. However, in the case of nonlinear analysis, the hysteretic damping is a significant factor, considered as damage variable in the low-cycle fatigue. Cumulative damage law based on low-cycle fatigue leads to an expression for damage given by Cosenza et al. [2]. It has also been reported by the first author [7] that  $c=(E_K I_N + H' I_K)/g$ , where  $I_K$ ,  $I_N$ ,  $E_K$  and  $H'$  are the given material constants at fixed step time and  $g$  is specific gravity, may be called the RDA Rayleigh damping, which is based on the mathematical-physical analogy between rheological model and dynamical model with viscous damping, so-called RDA. According to the basic RDA equations for mass:  $m=I_K I_N/g$  and stiffness of the rod:  $k=E_K H'/g$ , the viscous critical damping is  $c_{cr}=m/T_K^D + T_K^D k$ . Furthermore, the rheological behaviour of a rod can only be characterized by a single parameter, i.e. the dynamic time of retardation  $T_K^D=1/w$ , which gives  $c=xwm+xk/w$ . In the nonlinear analysis, which takes into account the RDA rate of release of visco-elastoplastic (VEP) energy, nonlinear behaviour is linearized, enabling to obtain equivalent damping and stiffness coefficients. Based on the formulas of two types of damping, an especially attractive iterative procedure for design of VEP rods or dampers is derived.

A logical extension of single RDA model is to accurately predict the fatigue life of a rod under the action of step loading, i.e. loading experienced by a large range of components and structures. As a general concept, at the structural level the existence of damage will reduce stiffness and increase damping. Contribution

mного konstrukcija i elemenata. Kao opšti koncept, na konstruktivnom nivou, postojanje oštećenja smanjuje krutost i povećava prigušenje. Doprinos prigušenja igra ključnu ulogu u proceni nosivosti, kada ponašanje konstrukcija zađe u neelastično područje. Zbog toga je kod prigušenih konstrukcija određivanje matrice prigušenja ili relativnog prigušenja tona od ključnog značaja. RDA tehnika modeliranja razvijena je kao teorijski koncept za proučavanje neelastičnog deformisanja materijala, koji je u stanju da opiše veoma važnu međusobnu interakciju između smanjene krutosti i prigušenja. Uspostavljen je odnos između modalnih parametara i konstruktivnih svojstava. Postupak se zasniva na proveru globalne konvergencije relativnih prigušenja tonova. Poređenje indeksa duktilnog oštećenja i zamornog veka, koje ovaj model predviđa za štap sa skokovito promenljivim poprečnim presekom, s nekim fizički kalibrisanim vrednostima JSS sistema, sugerise da se ovo RDA modeliranje može tretirati kao razumno ispravno.

## 2 MODEL OŠTEĆENJA USLED ZAMORA ZA VREMENSKI ZAVISNO PONAŠANJE ŠTAPOVA

### 2.1 Reološko-dinamička analogija

U analizi zamora materijala, naponi i deformacije su različite funkcije vremena. Reologija, kao nauka, pruža mogućnost izvođenja i rešavanja diferencijalnih jednačina reoloških modela. Grafički prikazani parovi napon-dilatacija u istim trenucima vremena,  $i$ , daju jednovremene dijagrame napon-dilatacija. Ako se totalna dilatacija može prikazati kao zbir elastične, viskoelastične i viskoplastične komponente, svaki jednovremeni dijagram napon-dilatacija dugog prizmatičnog štapa, prikazanog na slici 1b), može biti predstavljen reološkim modelom prema slici 1a), čija je strukturalna formula:  $H-K-(N|StV)$ .

Diferencijalnu jednačinu homogene jednoaksijalne VEP dilatacije već je izveo prvi autor [6]

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) + \epsilon(t) \left( \frac{E_K}{I_K} + \frac{H'}{I_N} \right) + e(t) \frac{E_K H'}{I_K I_N} = \frac{\dot{\epsilon}(t)}{E_H} + \epsilon(t) \left( \frac{E_K}{I_K E_H} + \frac{H'}{I_N E_H} + \frac{1}{I_K} + \frac{1}{I_N} \right) + \\ + s(t) \left( \frac{E_K}{I_K I_N} + \frac{H'}{I_K I_N} + \frac{E_K H'}{I_K I_N E_H} \right) - s_Y \frac{E_K}{I_K I_N} \end{aligned} \quad (1)$$

Viskoplastično (VP) ponašanje materijala pod monotonim opterećenjem

$$s - (s_Y + H' e_{vp}) \geq 0 \quad (2)$$

modelirano je trećim modelom u nizu sa slike 1a), gde je

$$\epsilon_{vp} = \frac{s - (s_Y + H' e_{vp})}{I_N} \quad (3)$$

Stanje pri rasterećenju može se takođe analizirati primenom jednačine (1), kao u slučaju relaksacije napona, kada se napon slobodno javlja pod trajno sprečenom amplitudom VP dilatacije (videti odeljak 2.5.).

of damping plays a critical role on the evaluation of load-carrying capacity when the behaviour of structures enters the inelastic range. Thus, for damped structures, the determination of damping matrix or modal damping coefficient is crucial. The RDA model technique is established as theoretical concept for studying inelastic material deformation that is able to describe a very important mutual interaction of reduced stiffness and damping. The relationship between modal parameters and structural properties is developed. A procedure is based on a global convergence check of modal damping ratios. The model predictions of the ductility damage index and fatigue life of the rod with step cross sections, which are compared with some physical calibrated values of a SDOF system, suggest that this RDA modelling may be treated as reasonably valid.

## 2 FATIGUE DAMAGE MODEL FOR TIME-DEPENDENT BEHAVIOUR OF RODS

### 2.1 Rheological-dynamical analogy

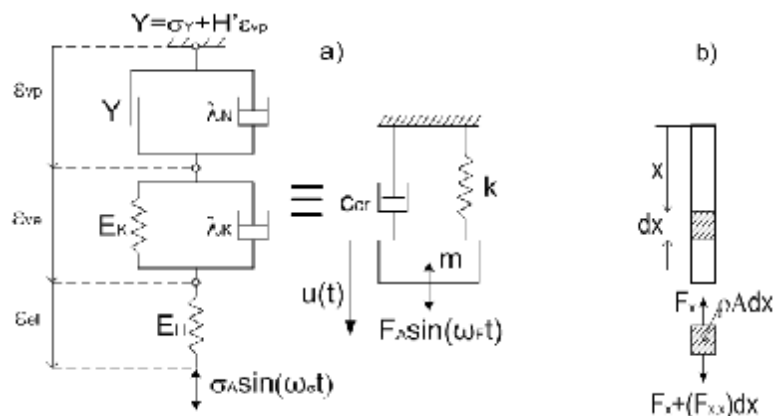
In the material fatigue investigations stress and strain are different functions of time. Rheology, as a science, gives an opportunity of assembling and processing differential equations of the rheological models. Graphically demonstrated, the stress-strain pairs in the same moments of time  $i$  give us isochronous stress-strain diagram. If the total strain is represented by the sum of the elastic, viscoelastic (VE) and viscoplastic (VP) components, each isochronous stress-strain diagram of a long prismatic rod, shown in Fig. 1b), can accurately be approximated by the rheological body in Fig. 1a), with rheological equation:  $H-K-(N|StV)$ .

The governing differential equation that concern homogeneous uniaxial VEP strain has already been derived by the first author [6]

The viscoplastic (VP) material behaviour under the conditions of monotonic loading

is modelled by the third of the sequentially linked models as shown in Fig. 1a), where

Also, the conditions of unloading can be analyzed by Eq. (1) as the case of relaxation of stress when stress can appear freely under permanent restrained amplitude of the VP strain, see paragraph 2.5.



Slika 1. RDA model dugog prizmatičnog štapa  
Figure 1. RDA model of a long prismatic rod

Odgovarajuća homogena RDA diferencijalna jednačina jeste

The homogeneous RDA equation is

$$\mathcal{L}(t)I_K I_N + \mathcal{L}(t)(E_K I_N + H' I_K) + e(t)E_K H' = 0 \quad (4)$$

gde su  $I_K$ ,  $I_N$ ,  $E_K$  i  $H'$  date konstante materijala u određenom vremenskom koraku. Ove konstante, a naročito Trouton-ovi koeficijenti viskoznosti  $I_K$  i  $I_N$ , ne mogu se lako odrediti eksperimentalnim putem.

where  $I_K$ ,  $I_N$ ,  $E_K$  and  $H'$  are given constants at fixed step time. However, these constants cannot be easily determined by the physical experiments, especially Trouton's normal viscosities  $I_K$  and  $I_N$ .

S druge strane, mehanički podužni poremećaj (dilatacija) propagira kroz elastični medij konačnom brzinom  $v = \sqrt{E_H/r}$ . Vibracija proizvoljne tačke  $M$  zaostaje u fazi za izvorom talasa. Ako sa  $l_0$  označimo rastojanje između krajeva štapa, vremenska razlika iznosi  $t - t_0 = T_K^D = l_0/v$ .  $T_K^D$  predstavlja karakteristično vreme (dinamičko vreme retardacije) za koje talas brzine  $v$  prelazi rastojanje  $l_0$ . Kružna frekvencija dinamičkog modela, koji predstavlja slobodne neprigušene podužne vibracije aksijalno napregnutog štapa konstantnog poprečnog preseka  $A$ , data je sa

On the other hand, a mechanical longitudinal disturbance (strain) propagates in an elastic medium at the finite phase velocity  $v = \sqrt{E_H/r}$ . The vibration at an arbitrary point  $M$  of the rod lags in phase behind that at the source of the wave. If  $l_0$  is the distance between two ends of the rod, the time difference is  $t - t_0 = T_K^D = l_0/v$ .  $T_K^D$  represents a characteristic time (dynamic time of retardation) for which a wave at the velocity  $v$  propagates the distance  $l_0$ . The natural angular frequency of a discrete dynamical model, which represents an undamped axial free longitudinal vibration of a rod with constant cross section  $A$ , is as follows

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{E_H A}{I_0} \frac{1}{r A l_0}} = \frac{v}{l_0} = \frac{1}{T_K^D} \Rightarrow T_K^D = \frac{l_0}{v} = \frac{1}{w} \quad (5)$$

Imajući na umu jednačinu (4), izraz sličan (5) može se formulisati postavljanjem reološkog modela štapa u stanje kritičnog viskoznog prigušenja ( $c = c_{cr}$ ), pri čemu je:  $E_K/I_K = H'/I_N$ ,  $I_K = E_K T_K$ ,  $I_N = H' T$ ,  $T_K = T = T_K^D$ :

Having in mind Eq. (4) an expression similar to Eq. (5) can be formulated setting the rheological model of a rod into the state of critical viscous damping ( $c = c_{cr}$ ), where:  $E_K/I_K = H'/I_N$ ,  $I_K = E_K T_K$ ,  $I_N = H' T$ ,  $T_K = T = T_K^D$

$$w = \sqrt{\frac{E_K H'}{I_K I_N}} = \sqrt{\frac{1}{T_K T^*}} = \frac{1}{T_K^D} \quad (6)$$

Ako zamenimo  $I_K I_N$  sa  $m/g$ ,  $E_K I_N + H' I_K$  sa  $c_{cr} g$  i  $E_K H'$  sa  $k/g$ , jednačina (4) postaje

Replacing  $I_K I_N$  by  $m/g$ ,  $E_K I_N + H' I_K$  by  $c_{cr} g$  and  $E_K H'$  by  $k/g$ , Eq. (4) becomes

$$\mathcal{L}(t)m + \mathcal{L}(t)c_{cr} + e(t)k = 0 \quad (7)$$

gde su

in which

$$m = \frac{I_K I_N}{g} = k (T_K^D)^2, \quad c_{cr} = \frac{(E_K I_N + H' I_K)}{g} = 2k T_K^D, \quad k = \frac{E_K H'}{g} \quad (8)$$



Prema navedenom, propagacija talasa kroz elastični medij predstavlja fizičku osnovu za postavljanje analogije između dva različita fizička fenomena. Stojeći talasi su najznačajniji, jer u njihovom slučaju sistem rasipa energiju samo između čvorova. Veliki broj objekata vibrira, tako da se u njima uspostavljaju stojeći talasi. Rastojanja između dva susedna čvora i između dva susedna trbuha talasa jednaka su i iznose polovinu njegove talasne dužine  $l$ . Ovo rastojanje naziva se dužina stojećeg talasa:  $l_{st}=l/2$ .

Pretpostavimo da je dužina štapa izloženog pritisku kritičnim opterećenjem, koje odgovara granici elastičnosti  $E$ , jednaka dužini stojećeg talasa ( $l_0=l_{st}$ ). Na ovaj način, utvrđeno je fizičko značenje karakteristične dužine,  $l_0$ , štapa. Rayleigh-Ritz-ov energetski postupak daje jednačinu kružne frekvencije  $j$ -tog tona, iz koje proizlazi kritičan napon. Na granici elastičnosti se može uspostaviti jednakost  $\frac{p^2}{(l_0/k_z)^2} = \frac{gj^*}{(l_0/k_z)k_z^3/l_z}$ , na

osnovu koje se može odrediti presečna tačka  $l_0/k_z = p^2 \left( k_z^3/l_z \right) (1/gj^*)$  Euler-ove i RDA krive, važna za određivanje donje Euler-ove i gornje RDA granične vitkosti, ili karakteristične dužine  $l_0$  za poznato  $\varphi$ . Karakteristična dužina  $l_0$  štapa kružnog poprečnog preseka može se odrediti iz izraza

$$l_0 = \frac{p}{4j^*g} \quad (9)$$

Viskoelastični (VE) koeficijent tečenja  $j^*$  jeste nova konstanta, odnosno karakteristika stanja naprezanja

$$j^* = \frac{b}{1-b} \quad (10)$$

gde je  $b$  dato sa

$$b = \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{s_p}{E_H} m} \right)^4 - 1 \right] \frac{E_H}{2s_p} \quad (m \text{ predstavlja Poisson-ov koeficijent}) \quad (11)$$

## 2.2 Amplituda viskoelastoplastične ciklične dilatacije

Neka je  $u$  pomeranje u bilo kom poprečnom preseku  $dx$  (videti sl. 1b) elastičnog štapa čije su poprečne dimenzije male u odnosu na talasnu dužinu. Rešenje za ustaljene prinudne vibracije, s graničnim uslovima:  $u(0,t)=0$  i  $AE_H du/dx(l_0,t)=F_A \sin(w_F t)$ , svodi se na standardni postupak razdvajanja promenljivih

$$u(x,t) = \frac{F_A V}{AE_H w_F} \frac{1}{\cos\left(\frac{w_F}{v} l_0\right)} \sin\left(\frac{w_F}{v} x\right) \sin(w_F t)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{F_A}{AE_H} \frac{1}{\cos\left(\frac{w_F}{v} l_0\right)} \cos\left(\frac{w_F}{v} x\right) \sin(w_F t) \quad (12)$$

Accordingly, propagation of elastic waves is physical basis for the analogy between two different physical phenomena. Standing waves are the most important ones, as in that case energy of the system dissipates only between its nodes. Many vibrating objects vibrate normally in a way that establishes standing waves in the object. The distance between two adjacent nodes and between two adjacent antinodes are the same and equal to half the wave-length  $l$  of the travelling waves. This distance is called the length of the standing wave:  $l_{st}=l/2$ .

Suppose that length of a rod under compressive critical load at the point of elasticity  $E$  is equal to the length of the standing wave ( $l_0=l_{st}$ ). In this way the physical meaning of a characteristic length  $l_0$  of the medium is determined. Rayleigh-Ritz energy procedure provides the equation of the circular frequency of  $j^{\text{th}}$  mode, from which the critical stress yields. At the point of elasticity the equality  $\frac{p^2}{(l_0/k_z)^2} = \frac{gj^*}{(l_0/k_z)k_z^3/l_z}$  can be

formed which leads to the intersection  $l_0/k_z = p^2 \left( k_z^3/l_z \right) (1/gj^*)$  of Euler's and the RDA curves, important for determination of lower Euler's and upper RDA slenderness boundary values, or a characteristic length  $l_0$  for the known  $\varphi$ . If the rod has circular cross-section the characteristic length  $l_0$  can be obtained by

The viscoelastic (VE) creep coefficient  $j^*$  is a new constant, or characteristic of the strained stage

where  $b$  is as follows ( $m$  represents the Poisson's ratio)

S druge strane, jednačina (1), zahvaljujući sinusnoj funkciji promene napona, dobija oblik

$$\begin{aligned} \sigma(t)m + \epsilon(t)c + e(t)k = s_A \left( \frac{k}{E_H} + \frac{E_K + H'}{g} - w_s^2 \frac{m}{E_H} \right) \sin(w_s t) + \\ + s_A \left( \frac{c}{E_H} + \frac{I_K + I_N}{g} \right) w_s \cos(w_s t) + s_0 \left( \frac{k}{E_H} + \frac{E_K + H'}{g} \right) - s_V \frac{E_K}{g} \end{aligned} \quad (13)$$

Rešenje za ustaljene vibracije, uzimajući u obzir jednoosijalnu homogenu VEP dilataciju, dobijeno je od strane prvog autora, [5]

$$u(x, t) = e_A \sin(w_s t - \arctan a) x \quad (14)$$

gde su

$$e_A = \frac{s_A}{E_H} \sqrt{\frac{(1 + j_{vp})^2 + d^2}{1 + d^2}}$$

- amplituda VEP ciklične deformacije, is the VEP cyclic strain amplitude,  
- is the VEP cyclic strain amplitude,

$$a = \frac{dj_{vp}}{1 + d^2 + j_{vp}} \quad \begin{array}{l} \text{- fazni ugao,} \\ \text{- is the phase angle,} \end{array}$$

$$j_{vp} = j^* + E_H/H' \quad \begin{array}{l} \text{- VP koeficijent tečenja,} \\ \text{- is the VP creep coefficient,} \end{array} \quad (15)$$

$j^*$  - VE koeficijent tečenja,  
- is the VE creep coefficient,

$H'$  - nagib VP dilatacije,  
- is the slope of VP strain,

$d = w_s/w = w_s T_K^D$  - relativna frekvencija, i  
- is the relative frequency, and

$w_s = w_F$  - kružna frekvencija napona ili opterećenja.  
- is the stress or load frequency.

Dva rešenja vibracija, dobijena primenom različitih teorija, mogu se uporediti samo u slučaju idealno elastičnog štapa. Podužni talasi se kroz dugi elastični štap kreću konačnom brzinom  $v \sim 5000m/s$ . Odatle su  $T_K^D = l_0/v$  i  $d = 2pfT_K^D$  mali brojevi za stvarne frekvencije sile -  $f$ , zbog čega je  $\tan d \sim d$  i  $\cos d \sim 1$ . Zamenom  $x=0$  i  $x=l_0$  u jednačini (12) dobija se

On the other hand, the Eq. (1), due to sinusoidal repeated stresses, takes the form of

The solution for the steady state vibration, taking into account the homogeneous uniaxial VEP strain, has already been obtained by the first author, [5]

where

Two solutions of vibrations obtained by different theories may be compared only in the case of ideal elastic rod. Longitudinal waves propagate in an elastic rod at the finite velocity,  $v \sim 5000m/s$ . Therefore,  $T_K^D = l_0/v$  like  $d = 2pfT_K^D$  are small numbers for real frequencies  $f$  of the force and because of that will be  $\tan d \sim d$  and  $\cos d \sim 1$ . Substitution of  $x=0$  and  $x=l_0$  into the Eqs. (12) will obtain

$$u(0, t) = 0, \quad u(l_0, t) = \frac{F_A v}{AE_H w_F} \tan\left(\frac{w_F}{v} l_0\right) \sin(w_F t) = \frac{s_A}{E_H} \frac{l_0}{d} \tan d \sin(w_F t) = \frac{s_A}{E_H} l_0 \sin(w_F t)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{s_A}{E_H} \frac{1}{\cos d} \sin(w_F t) = \frac{s_A}{E_H} \sin(w_F t), \quad \frac{\partial u(l_0, t)}{\partial x} = \frac{s_A}{E_H} \sin(w_F t)$$

Uvođenjem  $\varphi_{vp}=0$  (idealno elastično stanje) u jednačinu (14) dobijaju se isti rezultati.

On the other hand, substitution of  $\varphi_{vp}=0$  (ideal elastic state) into the Eq. (14) will obtain the same results.

$$u(0, t) = 0, \quad e(t) = \frac{s_A}{E_H} \sin(w_F t), \quad u(l_0, t) = \frac{s_A}{E_H} \sin(w_F t) l_0$$

To znači da elastično RDA rešenje uzima u obzir efekte inercije na isti način kao i klasična neprigušena talasna jednačina. Ovi efekti su prema tome uvršteni i u rešenje prigušenih VEP vibracija. Rešenje zavisi od  $d$  i vrednosti koeficijenta  $\varphi_{vp}$ , kao i nagiba  $H'$ . Prvi autor [8] odredio je izraze za nagibe u oblastima plastičnog tečenja i deformacijskog ojačanja, redom:

$$H^{(i)} = \frac{E_H}{ij^*}, \quad H^{(j)} = \frac{E_H}{(j+1)j^*}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Osim toga, RDA teorija daje zadržani (dinamički) i izgubljeni (imaginarni) RDA modul, kao i koeficijent viskoznosti, koji se koriste u ovom radu

$$E_R = E_H \frac{1+d^2+j_{vp}}{(1+j_{vp})^2+d^2}, \quad E_I = E_R \tan \alpha \quad (17)$$

$$I_R = \frac{1}{w_s} E_I = \frac{E_H T_K^D j_{vp}}{(1+j_{vp})^2+d^2}, \quad I_I = I_R \operatorname{ctg} \alpha \quad (18)$$

This means that the RDA elastic solution takes into account the inertia effects like classical undamped wave equation, and these effects are also included in damped VEP solution of vibrations. This solution varies with  $d$  and the value of coefficient  $\varphi_{vp}$  as well the slope  $H'$ . The slopes were obtained by the first author [8] at the plastic yielding and at the strain hardening respectively:

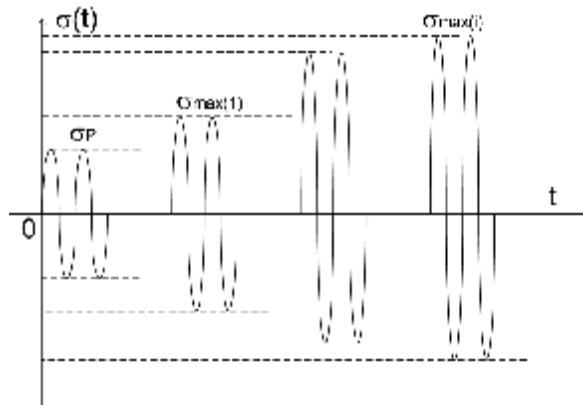
Furthermore, the RDA theory gives the dynamic and the loss RDA modules like viscosities, which are used in this paper

### 2.3 Skokovita istorija napona

Umesto eksperimentalno utvrđenih vrednosti, preporučuje se korišćenje napona  $\sigma_{max}^{(i)}$  očitanih s jednovremenih RDA dijagrama (videti sl. 2.).

### 2.3 Multi-step stress history

Rather than experimentally determined values, the stresses  $\sigma_{max}^{(i)}$  from isochronous RDA diagram are suggested to be used, see Fig. 2.



Slika 2. Skokoviti ciklični naponi za različita stanja dinamičke ravnoteže i sa  $R=-1$   
Figure 2. Step cyclic stresses for different dynamic equilibriums i with  $R=-1$

Jednačine (19) predstavljaju izraze za jednovremene parove napon-dilatacija, dobijene primenom RDA postupka, za stanja dinamičke ravnoteže u oblasti plastičnog tečenja  $i$  (ili  $j$  u oblasti deformacijskog ojačanja). Korišćenjem tih izraza, mogu se razmatrati realnija stanja skokovitih promena perioda sa opterećenjem konstantne amplitude i frekvencije.

Stages of dynamical equilibrium at plastic yielding  $i$  (or  $j$  at strain hardening), where isochronous stress-strain values are obtained using the RDA method, are expressed below. Using these expressions, more realistic step steady state periods of constant amplitude and frequency of the load may be considered.

$$s_{max}^{(i)} = \frac{s_P(1+ij^*) + s_E(1+j^*)[i(1+ij^*)-1]}{ij^*(1+ij^*)}, \quad e_Y^{(i)} = \frac{E_H}{E_R^{(i)}} e_P = (1+ij^*) e_P$$

$$s_{max}^{(j)} = s_P \frac{1+(j+1)j^*}{(j+1)j^*} + s_E \frac{(1+j^*)j}{(j+1)j^*}, \quad e_Y^{(j)} = e_Y^{(i)} + \frac{E_H}{E_R^{(j)}} e_P = e_Y^{(i)} + [1+(1+j)j^*] e_P \quad (19)$$

S poznatim veličinama  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_P$  i  $\sigma_E$  mogu se odrediti

The following expressions are obtained for the known:  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_P$  and  $\sigma_E$

$$R^{(i)} = \frac{S_{min}}{S_{max}} = \frac{2s_0 - s_{max}^{(i)}}{s_{max}^{(i)}}, \quad S_A^{(i)} = \frac{1 - R^{(i)}}{2} S_{max}^{(i)}, \quad S_Y = Y_L = \frac{S_P}{j^*} + S_E \quad (20)$$

## 2.4 Indeks duktilnog oštećenja

Duktilnost je svojstvo koje omogućava da konstrukcija izdrži velike plastične deformacije bez značajnog gubitka nosivosti. Izraz za duktilnost aksijalno opterećenih štapova  $m$  izveo je i Milašinović [7] kao

$$m = \frac{e_Y^{(i)}}{e_P} = \frac{(1 + j^*) e_P}{e_P} = 1 + j^* = 1 + j_{vp} - j^* \quad (21)$$

Najjednostavniji indeks oštećenja jeste indeks duktilnog oštećenja, koji razmatra samo oštećenja usled totalnih deformacija. Indeks duktilnog oštećenja dat je izrazom

## 2.4 Ductility damage index

Ductility is the property, which allows the structure to undergo large plastic deformations without significant loss of strength. Ductility  $m$  is also obtained by Milašinović [7] as follows

The simplest damage index is the ductility damage index, which considers only the damage due to total deformation. The ductility damage index is given by

$$d = \frac{e_{tot} - e_Y}{e_{ul} - e_Y} \quad (22)$$

gde su  $e_{ul}$ ,  $e_Y$  ultimativna dilatacija i dilatacija na granici tečenja, redom, dok je  $e_{tot}$  amplituda totalne dilatacije, data sa

where:  $e_{ul}$ ,  $e_Y$  are the ultimate and the yield strain respectively, while  $e_{tot}$  is the total strain amplitude as follows

$$e_{tot} = \frac{S_{max}}{2E_H} \left[ (1 + R)(1 + j^*) + (1 - R) \sqrt{\frac{(1 + j_{vp})^2 + d^2}{1 + d^2}} \right] \quad (23)$$

## 2.5 Relaksacija napona

Pod trajno ograničenom amplitudom deformacije  $e(0)$ , frikcioni klizač reološkog modela ne vraća se u svoj početni položaj, te nastupa relaksacija napona. Diferencijalna jednačina RDA modela jeste

## 2.5 Relaxation of stress

Under any permanent restrained strain amplitude  $e(0)$ , the friction slider does not return into its original position, and relaxation of stress takes place. The RDA model differential equation is as follows

$$m \dot{\sigma} + c \sigma + ke = \frac{m}{m_0} \dot{\sigma}_0 + \frac{c}{c_0} \sigma_0 + \frac{k}{k_0} S - \frac{k_0}{k} S_Y \quad (24)$$

gde su

where

$$m_0 = m \frac{1}{E_H}, \quad c_0 = c \frac{1}{E_H} + \frac{I_K + I_N}{g}, \quad k_0 = k \frac{1}{E_H} + \frac{E_K + H'}{g}, \quad \frac{k_0}{k} = \frac{E_K}{g} \quad (25)$$

Ako je  $T_K = T^* = T_K^D$ , prigušenje RDA modela je kritično, gde je

If  $T_K = T^* = T_K^D$ , the RDA model is critically-damped, where

$$m_0 = \frac{k(T_K^D)^2}{E_H}, \quad c_0 = k T_K^D \left( \frac{2 + j^*}{E_H} + \frac{1}{H'} \right), \quad k_0 = k \left( \frac{1 + j^*}{E_H} + \frac{1}{H'} \right), \quad \frac{k_0}{k} = k \frac{1}{H'} \quad (26)$$

Zamenom ovih izraza u jednačini (24) dobija se

Substitution of these expressions into the Eq. (24) yields

$$(T_K^D)^2 \dot{\sigma} + T_K^D \left( 2 + j^* + \frac{E_H}{H'} \right) \sigma + \left( 1 + j^* + \frac{E_H}{H'} \right) S - \frac{E_H}{H'} S_Y = E_H e(0) \quad (27)$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine jeste

The general solution of this differential equation is

$$s(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T_K^D}} + C_2 e^{-\frac{1+j_{vp}}{T_K^D} t} + \frac{E_H}{1+j_{vp}} \left( e(0) + \frac{s_Y}{H'} \right) \quad (28)$$

Međutim, brzina podužnih talasa iznosi  $v \sim 5000 \text{ m/s}$ , zbog čega će karakteristično vreme  $T_K^D = l_0/v$  biti mali broj. Zbog toga je  $e^{-t/T} \sim 0$ , pa se u modelu javlja relaksacija napona

However, the phase velocity of longitudinal waves is  $v \sim 5000 \text{ m/s}$  and a characteristic time,  $T_K^D = l_0/v$  will be a small number. Thus,  $e^{-t/T} \sim 0$  and the model will have the relaxation of stress

$$s(t) = \frac{1 + \frac{E_H}{H'} \frac{s_Y}{s(0)}}{1 + j_{vp}} s(0) \quad (29)$$

Odgovarajući model elastoplastičnog štapa (Prandtl-Reuss-ovo telo) bez ojačanja ( $H' \rightarrow 0$ ) imaće relaksaciju napona  $\sigma(t) = \sigma_Y$ , što sledi iz graničnog slučaja jednačine (29) kada  $H' \rightarrow 0$ . Takođe, vidi se da viskoplastičnost teži idealnoj plastičnosti za veoma male viskoznosti ( $I_N = H' T_K^D \rightarrow 0$  ako  $H' \rightarrow 0$ ). Ako se u razmatranje uzme samo zakasnela ili VE dilatacija, ( $H' \rightarrow \infty$ ) model će imati relaksaciju napona

The corresponding model of an elastoplastic rod (Prandtl-Reuss' body) without hardening ( $H' \rightarrow 0$ ) has the relaxation of stress  $\sigma(t) = \sigma_Y$ , that is obtained as a limit case of Eq. (29) when  $H' \rightarrow 0$ . It also yields that viscoplasticity tends towards ideal plasticity for very small viscosity ( $I_N = H' T_K^D \rightarrow 0$  if  $H' \rightarrow 0$ ). Taking into consideration only delayed elastic or VE strain ( $H' \rightarrow \infty$ ) the model has the relaxation of stress

$$s(t) = \frac{1}{1+j^*} s(0) = \frac{1}{1+j^*} E_H e(0) = S(t) e(0) \quad (30)$$

## 2.6 Granica izdržljivosti

Štap izložen ravnomerno ponavljanom naizmeničnom opterećenju otkazaće pri naponu daleko nižem od granične čvrstoće materijala određene pri statičkom opterećenju. Ovaj napon, nazvan *granica izdržljivosti*, smatra se osnovom za proračun čvrstoće štapa izloženog cikličnom opterećenju. Ako je cela amplituda VE dilatacije,  $e_A$ , u potpuno reverzibilnom opterećenju (bez pojave prslina), trajno ograničena, relaksacija napona je određena kao sledeća minimalna vrednost

## 2.6 Endurance limit

Any rod subjected to a sustained repeated-alternating load will fail under the stress which is well below the ultimate strength of the material when exposed to static load. This stress value, called the endurance limit, is assumed as the basis for strength calculations of rods subjected to cyclic loading. If the whole VE strain amplitude  $e_A$ , in fully reversed loading (when no crack is present), is permanently restrained, the following stress relaxation is obtained as minimum value

$$s(t) = S(t) e_A = s_A \sqrt{\frac{(1+j^*)^2 + d^2}{1+d^2}} \frac{1}{1+j^*} = s_e(-1) \quad (31)$$

Dakle, može se zaključiti da je rešenje za relaksaciju napona pod trajno ograničenom amplitudom VE dilatacije,  $\varepsilon_A$ , zamor konstantne amplitude napona pri potpuno reverzibilnom opterećenju, koji je već dobijen od strane prvog autora [5], kako sledi

So it can be concluded that the solution for the relaxation of stress under permanently restrained VE strain amplitude  $\varepsilon_A$  is the constant amplitude fatigue in fully reversed loading, which has already been obtained by the first author, [5] as follows

$$s_e(-1) = s_A D \quad (32)$$

gde je  $D$  VE dinamički koeficijent (videti sl. 3, kada je  $\varphi = 2$ )

where  $D$  is VE dynamic coefficient (see Fig. 3 when  $\varphi = 2$ )

$$D = \sqrt{\frac{(1+j^*)^2 + d^2}{1+d^2}} \frac{1}{1+j^*} \quad (33)$$

Shodno tome, RDA zamorna čvrstoća pod trajno potpuno ograničenom amplitudom VEP dilatacije ima sledeću minimalnu vrednost

Accordingly, the RDA fatigue strength under the completely permanent restrained VEP strain amplitude has the following minimum value

$$s_e(-1) = s_A \sqrt{\frac{(1+j_{vp})^2 + d^2}{1+d^2}} \frac{1 + \frac{E_H s_Y}{H' s_A}}{1+j_{vp}} = s_A D_{vp} \left[ 1 + (j_{vp} - j^*) \frac{s_Y}{s_A} \right] \quad (34)$$

gde je  $D_{vp}$  VEP dinamički koeficijent

where  $D_{vp}$  is VEP dynamic coefficient

$$D_{vp} = \sqrt{\frac{(1+j_{vp})^2 + d^2}{1+d^2}} \frac{1}{1+j_{vp}} \quad (35)$$

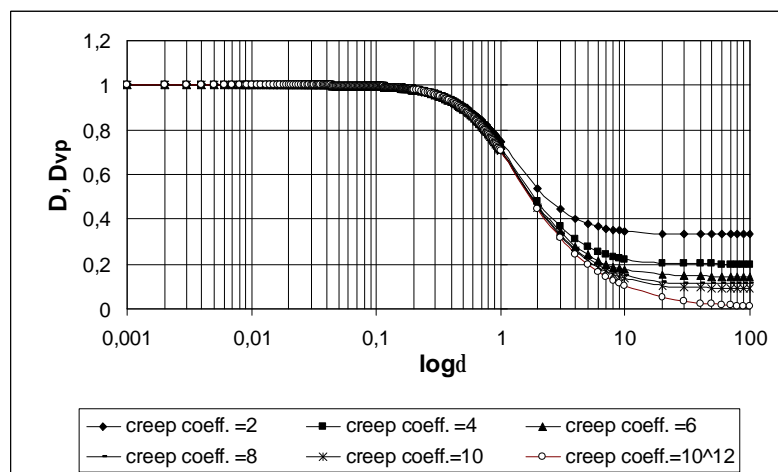
Na slici 3. vidi se da je VEP dinamički koeficijent veći za niže vrednosti koeficijenta tečenja. Takođe, može se uočiti pad vrednosti  $D_{vp}$  pri porastu relativne frekvencije za sve vrednosti  $d > 1$ .

As shown in Fig. 3, if creep coefficient is lower, the VEP dynamic coefficient will be greater and, also, if the relative frequency is greater,  $D_{vp}$  will be lower for all values  $d > 1$ .

Korišćenjem veza za konstantnu,  $\sigma_0$  i promenljivu komponentu ciklusa,  $\sigma_A$  dobija se

Using the relationships for the constant,  $\sigma_0$  and the variable component of cycle,  $\sigma_A$  yield

$$s_e(R) = \frac{1}{2} s_{max} \left\{ 1 + R + (1-R) D_{vp} \left[ 1 + (j_{vp} - j^*) \frac{s_Y}{s_{max}} \right] \right\} \quad (36)$$



Slika 3. Zavisnost između dinamičkih koeficijenata i relativne frekvencije  
Figure 3. Frequency dependence of dynamic coefficients

Krive zamora postaju horizontalne kada  $d \rightarrow 100$ , što ukazuje na dobro definisanu granicu izdržljivosti. Iz jednačine (36) sledi

The fatigue curves become horizontal when  $d \rightarrow 100$ , thus indicating a well-defined endurance limit. From Eq. (36) follows

$$\lim_{d \rightarrow 100} s_e(R) = \frac{1}{2} s_{max} \left[ 1 + R + (1-R) \frac{1 + (j_{vp} - j^*) \frac{s_Y}{s_{max}}}{1 + j_{vp}} \right] \quad (37)$$

### 3 MODEL OŠTEĆENJA USLED ZAMORA ZA ŠTAPOVE S JEDNIM STEPENOM SLOBODE (JSS)

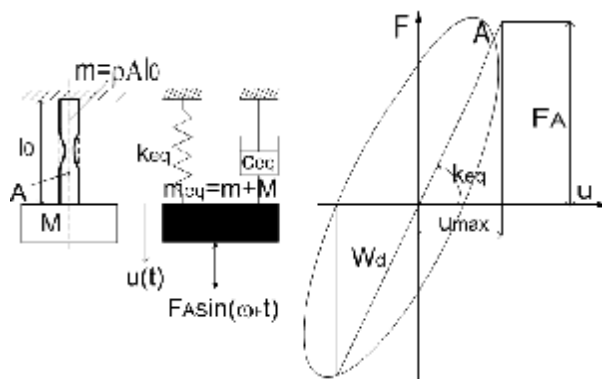
### 3 FATIGUE DAMAGE MODEL FOR SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM (SDOF) RODS

#### 3.1 Viskoelastičan JSS sistem

#### 3.1 SDOF viscoelastic system

RDA sistem prikazan na slici 4. sadrži glavnu masu  $M$ , koja trpi sinusoidalnu pobudu i čija rezonantna amplituda treba da bude minimizirana pomoću štapa od VEP materijala, pod cikličnom dilatacijom.

The RDA system shown in Fig. 4 consists of a main mass  $M$ , which is sinusoidal excited and whose resonance amplitudes should be minimized by the influence of the material of the rod-like VEP substance, under cyclic strain.



Slika 4. Viskoelastičan RDA JSS sistem  
Figure 4. SDOF viscoelastic RDA system

Primenom Newton-ovog zakona kretanja na sistem prikazan na sl. 4, jednačina kretanja dobija najopštiji oblik

Employing Newton's law of motion to the system, the equation of motion takes its most general form

$$m_{eq} \ddot{u} + c_{eq} \dot{u} + k_{eq} u = F_A \sin(\omega_F t) \quad (38)$$

gde je

where

$$c_{eq} = \alpha c_{cr} = \alpha 2 \sqrt{k_{eq} m_{eq}} \quad (39)$$

Prirodna i relativna frekvencija viskoelastičnog RDA JSS sistema s jednom koncentrisanom masom jesu:

The natural and relative frequencies of a SDOF viscoelastic RDA system with one lumped element of mass are:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{k}{m \left(1 + \frac{M}{m}\right) (1 + j^*)}} = \omega \frac{1}{\sqrt{(1 + j^*) (1 + h)}} \quad (40)$$

$$d^* = \frac{\omega_F}{\omega^*} = \frac{\omega_F}{\omega} \sqrt{(1 + j^*) (1 + h)} = d \sqrt{(1 + j^*) (1 + h)} \quad (41)$$

gde su

in which

$$k_{eq} = \frac{k}{1 + j^*} \quad \begin{array}{l} \text{- degradirana krutost,} \\ \text{- is the degradation stiffness,} \end{array} \quad (42)$$

$$h = \frac{M}{m} \quad \begin{array}{l} \text{- odnos masa (m je masa štapa),} \\ \text{- is the mass ratio (m is mass of the rod).} \end{array} \quad (43)$$

Veoma je važno da RDA model ima isti fazni ugao kao i jednostavan JSS sistem sastavljen od mase, opruge i prigušivača, pri linearnim ustaljenim vibracijama. Tada se može uspostaviti jednakost, iz koje proizlazi relativno viskozno prigušenje RDA sistema s jednom koncentrisanom masom (videti: Milašinović [7]).

It is very important that the RDA model has the same phase angle as a simple SDOF spring mass system with damping in the linear steady state vibration, and thus, we can form equality, from which yields the viscous damping ratio of a single RDA system with one lumped element of mass, see Milašinović [7]

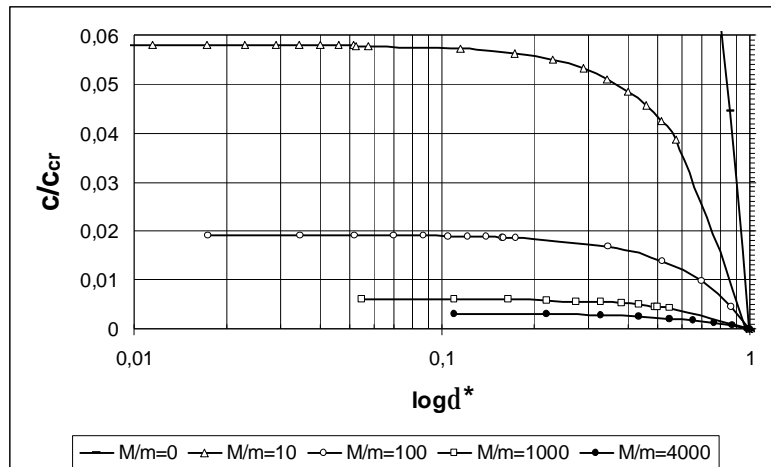
$$\frac{dj^*}{1 + d^2 + j^*} = \frac{2xd^*}{1 - d^{*2}} \Rightarrow x = \frac{j^* d (1 - d^{*2})}{2d^* (1 + d^2 + j^*)} \quad (44)$$

Koeficijent, opisan izrazom (44), jeste funkcija različitih relativnih parametara:  $j^*$ ,  $h$  i  $d$ . Analiza zavisnosti relativnog viskoznog prigušenja od relativne frekvencije  $d^*$ , prikazane na sl. 5, može biti značajna,

The ratio, which is formulated by Eq. (44), is a function of various relative parameters:  $j^*$ ,  $h$  and  $d$ . It may be important to analyze the dependence of the viscous damping ratio on the relative frequency  $d^*$ , which

budući da je ova frekvencija funkcija odnosa masa  $h$ .

is shown in Fig. 5, because this frequency is function of mass ratio  $h$ .



Slika 5. Zavisnost relativnog viskoznog prigušenja od relativne frekvencije, za koeficijent tečenja  $j^* = 2$   
 Figure 5. Frequency dependence of viscous damping ratio for creep coefficient  $\alpha = 2$

Krive na sl. 5. konstruisane su za pet vrednosti  $h$  (0, 10, 100, 1000, 4000). Uočava se ključni uticaj odnosa masa  $h$ : smanjenjem ovog odnosa dolazi do porasta veličine relativnog viskoznog prigušenja. Takođe, s porastom relativne frekvencije, relativno viskozno prigušenje se smanjuje. Zanimljivo je primetiti da za  $h=1000$  pozitivno relativno viskozno prigušenje opada sa 0.006 na 0.004. To potvrđuju slična eksperimentalna zapažanja na čeliku, koja pokazuju  $0.01 > c/c_{cr} > 0.003$ .

VE dinamički koeficijent RDA sistema jeste

Variations of the relative frequency  $d^*$  are given for five values of  $h$  (0, 10, 100, 1000, 4000). It can be seen from Fig. 5 that influence of mass ratio  $h$  is crucial, so that: if the mass ratio is smaller, the viscous damping ratio will be larger and, also, that if the relative frequency is larger, the viscous damping ratio will be smaller. It is interesting to note that for  $h=1000$ , positive viscous damping ratio decreases from 0.006 to 0.004. This confirms similar experimental observations made on steel, which show  $0.01 > c/c_{cr} > 0.003$ .

The VE dynamic coefficient of a SDOF RDA system is

$$D^* = \sqrt{\frac{(1+j^*)^2 + d^{*2}}{1+d^{*2}}} \frac{1}{1+j^*} \quad (45)$$

Zavisnost dinamičkih koeficijenata RDA sistema od relativne frekvencije prikazana je na sl. 6. Može se primetiti značajan uticaj odnosa masa na veličinu dinamičkih koeficijenata za sve vrednosti  $\delta < 10$ .

Iz veza između konstantne,  $\sigma_0$  i promenljive komponente ciklusa,  $\sigma_A$ , sledi čvrstoća na zamor RDA sistema

The dynamic coefficients of a single RDA system versus relative frequency are shown in Fig. 6.

A great influence of mass ratio on dynamic coefficients for all values  $\delta < 10$  can be observed.

From relationships for the constant,  $\sigma_0$  and the variable component of cycle,  $\sigma_A$ , the following fatigue strength of a single RDA system yields

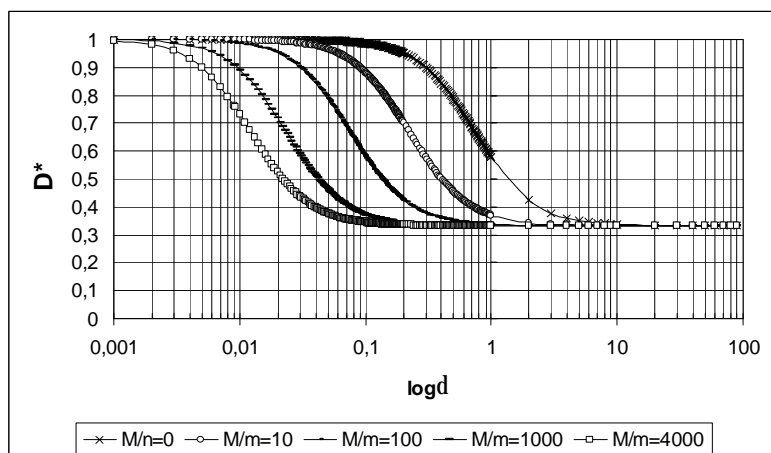
$$s_e(R) = \frac{1}{2} s_{max} [1 + R + (1-R)D^*] \quad (46)$$

Amplituda totalne dilatacije se može napisati u obliku

The total strain amplitude can be written in the form

$$e_{tot} = \frac{s_{max}}{2E_H} (1+j^*) [(1+R) + (1-R)D^*] \quad (47)$$





Slika 6. Zavisnost dinamičkih koeficijenata od relativne frekvencije za nekoliko odnosa masa i koeficijent tečenja  $j^*=2$   
 Figure 6. Frequency dependence of dynamic coefficients for several mass ratios and creep coefficient  $\phi=2$

Posmatranjem jednog viskoelastičnog RDA sistema efektivne krutosti  $k_{eq}=k/(1+j^*)$  i efektivnog prigušenja  $c_{eq}=x2\sqrt{k_{eq}m_{eq}}$  pod harmonijskom pobudom  $F(t)=F_A \sin(wt)$ , dolazimo do poznatog rešenja

Considering a single viscoelastic RDA system with effective stiffness  $k_{eq}=k/(1+j^*)$  and effective damping  $c_{eq}=x2\sqrt{k_{eq}m_{eq}}$  under the harmonic excitation  $F(t)=F_A \sin(wt)$ , we obtain well known solution

$$u(t) = \sqrt{u_0^2 + \left( \frac{\mathcal{U}_0 + u_0 x w^*}{w_d^*} \right)^2} e^{-x w^* t} \cos \left( w_d t - \arctan \left( \frac{\mathcal{U}_0 + u_0 x w^*}{u_0 w_d^*} \right) \right) + \frac{F_A}{k_{eq}} \frac{1}{\sqrt{(1-d^{*2})^2 + (2xd^*)^2}} \sin \left( w_f t - \arctan \left( \frac{2xd^*}{1-d^{*2}} \right) \right) \quad (48)$$

gde su:

where:

$$u_0 = \frac{F_A}{AE_H} l_0, \quad \mathcal{U}_0 = \frac{F_A}{A} \frac{j^*}{E_H T_K^D} l_0, \quad w_d^* = w^* \sqrt{1-x^2} \quad (49)$$

Amplituda dinamičkog odgovora RDA sistema s jednom koncentrisanom masom može se napisati u obliku

The amplitude of the steady state response of the RDA system with one lumped element of mass can be written in the form

$$A = \frac{F_A}{k_{eq}} \frac{1}{\sqrt{(1-d^{*2})^2 + (2xd^*)^2}} \quad (50)$$

U jednačini (50) statički ugib  $F_A/k_{eq}$  se množi dinamičkim faktorom uvećanja

In Eq. (50) the static deflection  $F_A/k_{eq}$  is multiplied by the dynamic magnification factor

$$D_{eq} = \frac{1}{\sqrt{(1-d^{*2})^2 + (2xd^*)^2}} \quad (51)$$

### 3.2 Viskoelastoplastičan JSS sistem

Jedina bitna razlika između elastično i neelastično deformisanog štapa jeste veza napon-dilatacija za materijal štapa. Teorija neelastičnosti bila bi značajno pojednostavljena kada bi se našla jedinstvena funkcija kojom bi se mogao aproksimirati dijagram napon-dilatacija – i kroz elastičnu i kroz neelastičnu oblast. Ova

### 3.2 SDOF visco-elastoplastic system

The only difference to be noted between a rod that is elastically deformed and the inelastically deformed one is the stress-strain relation for the material of a rod. Theory of inelasticity would be greatly simplified if only one function is found to approximate the stress-strain diagram over both the elastic and inelastic range. This

funkcija dobijena je kao jednovremeni RDA dijagram napon-dilatacija, formulisan jednačinama (19).

Takođe, prema RDA principu, energija koju rasipa neelastičan sistem izjednačava se sa energijom koju pri rezonanciji oslobađa viskozni štap linearnog sistema, tako da se ekvivalentno relativno prigušenje može izraziti u obliku koji je dao prvi autor [7]

$$x_{eq} = \frac{A}{I_0^2} (1-R)^2 \frac{(1+j_{vp})^2 + 1}{8} \quad (52)$$

Ovaj pristup, zasnovan na geometriji histerezisne petlje (videti sl. 4), uz uspostavljanje veze sa ekvivalentnim linearnim sistemom, čini osnovu metoda geometrijske krutosti, u kojem je krutost linearne konstrukcije definisana kao nagib linije koja spaja krajeve histerezisne petlje, dok se energija koju oslobađa neelastičan sistem izjednačava sa energijom oslobođenom pri rezonanciji viskoznog štapa linearnog sistema, izloženom sinusoidalnoj pobudi.

VEP dinamički koeficijent RDA JSS sistema je

$$D_{vp}^* = \sqrt{\frac{(1+j_{vp})^2 + d^{*2}}{1+d^{*2}}} \frac{1}{1+j_{vp}} \quad (53)$$

Upotrebom veza između konstantne,  $\sigma_0$  i promenljive komponente ciklusa,  $\sigma_A$ , može se odrediti čvrstoća na zamor RDA sistema

$$s_e(R) = \frac{1}{2} s_{max} \left\{ 1 + R + (1-R) D_{vp}^* \left[ 1 + (j_{vp} - j^*) \frac{s_Y}{s_{max}} \right] \right\} \quad (54)$$

Amplituda totalne dilatacije VEP RDA sistema može se napisati u obliku

$$e_{tot} = \frac{s_{max}}{2E_H} \left[ (1+R)(1+j^*) + (1-R) D_{vp}^* (1+j_{vp}) \right] \quad (55)$$

### 3.3 Analiza ispravnosti modela

#### 3.3.1 Karakteristike ispitnog materijala i uzorka

Za proveru novog modela zamornog oštećenja koriste se opsežni podaci koje je objavio prvi autor, [5] i [8]. Ispitani uzorak je od niskougleničnog čelika. Vrednosti fizičkih parametara mekog čelika preuzete su iz priručnika [10]: specifična toplota  $c=0.113 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$ ; gustina  $r=7860 \text{ kg/m}^3$ ; koeficijent linearnog termičkog širenja  $a_T=0.0000125 \text{ } 1^\circ\text{C}$ ; modul elastičnosti  $E_H=2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

#### Napon i dilatacija na granici proporcionalnosti

$$s_p = \frac{2rc}{a_T} = \frac{2 \cdot 7860 \cdot 0.113}{0.0000125} = 1.421088 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 142 \text{ MPa}, \quad e_p = \frac{s_p}{E_H} = 0.000676$$

function is obtained as isochronous stress-strain RDA diagram and formulated by Eqs. (19).

Also, according to the RDA principle, the energy dissipated by the inelastic system is set equal to the energy dissipated at resonance by the viscous rod of the linear system, so that equivalent damping coefficient can be expressed as given by the first author, [7]

This approach, based on the geometry of the hysteresis loop (see Fig. 4), but making reference to the equivalent linear system, forms the basis of the geometric stiffness method, in which the stiffness of the linear structure is defined as the slope of the line joining the ends of the hysteresis loop and the energy dissipated by the inelastic system is set equal to the energy dissipated at resonance by the viscous rod of the linear system, subjected to sinusoidal excitation.

The VEP dynamic coefficient of a SDOF RDA system is

The use of relationships of the constant,  $\sigma_0$  and the variable component of cycle,  $\sigma_A$  yields the following fatigue strength of the RDA system

The total strain amplitude of a VEP single RDA system can be written in the form

### 3.3 Model validation

#### 3.3.1 Test material and specimen

The comprehensive data published by the first author, [5] and [8], has been used to validate a new fatigue damage model. The test material was low carbon steel. The values of physical parameters of mild-steel are taken from the handbook, [10]: Specific heat  $c=0.113 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$ ; Density  $r=7860 \text{ kg/m}^3$ ; Coefficient of linear expansion  $a_T=0.0000125 \text{ } 1^\circ\text{C}$ ; Elastic modulus  $E_H=2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

#### Proportional stress and strain

### Napon na granici elastičnosti

Eksperiment aksijalnog zamora sproveden je na izolovanoj čeličnoj šipki armature (prototip):  $l_0=50$  cm,  $f=1.9$  cm. Napon na granici elastičnosti možemo odrediti uzimajući u obzir Euler-ovu formulu.

$$k_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \frac{f}{4} = \frac{1.9}{4} = 0.475 \text{ cm}, \quad \left( \frac{l_0}{k_z} \right) = \frac{50}{0.475} = 105.26,$$

$$s_E = \frac{E_H p^2}{\left( \frac{l_0}{k_z} \right)^2} = \frac{210000 p^2}{105.26^2} = 187 \text{ MPa}$$

Granica elastičnosti  $E$  ovog čelika u dobroj je saglasnosti s vitkošću uzorka 105.26, zato što elastična Euler-ova teorija za ovu vrstu niskougljeničnog čelika (Fe E275  $\sigma_Y=275$  N/mm<sup>2</sup>,  $\sigma_{ul}=390$  N/mm<sup>2</sup>, prema prEN 10113) ne važi za vitkosti manje od 104.

### VE koeficijent tečenja

$$j^* = \frac{p}{4l_0g} = \frac{p}{4 \cdot 50 \cdot 7.86 \cdot 10^{-3}} = 2$$

### 3.3.2 Uticaj odnosa masa na zamornu čvrstoću i amplitudu totalne dilatacije

Da bismo razmotrili uticaj odnosa masa,  $h=M/m$  na zamornu čvrstoću i amplitudu totalne dilatacije, izabraćemo dve vrednosti –  $h$  (0, 3683) i frekvenciju pobude  $f_f=15$  Hz, pri čemu je  $d=0.009114$ .

### Elasticity stress

Axial fatigue experiment was performed on the isolated reinforcement steel rod (prototype):  $l_0=50$  cm,  $f=1.9$  cm. The elasticity stress can be determined taking into account the Euler formula.

The fact is that point of elasticity  $E$  of this steel is in good accordance with slenderness ratio of 105.26, because elastic Euler's theory for this type of low-carbon steel (Fe E275  $\sigma_Y=275$  N/mm<sup>2</sup>,  $\sigma_{ul}=390$  N/mm<sup>2</sup>, according to prEN 10113) is not valid for slenderness ratio under the 104.

### The VE creep coefficient

### 3.3.2 The influence of mass ratio on fatigue strength and total strain amplitude

In order to clarify the influence of mass ratio,  $h=M/m$  on fatigue strength and total strain amplitude, let us choose two values of  $h$  (0, 3683) and excitation frequency  $f_f=15$  Hz, with  $d=0.009114$ .

Tabela 1. Uticaj odnosa masa  $h=M/m$  na zamornu čvrstoću i amplitudu totalne dilatacije  
Table 1. The influence of mass ratios  $h=M/m$  on fatigue strength and total strain amplitude

	$\eta=0$	$\eta=3683$
$d^* = d\sqrt{(1+j^*)(1+h)}$	0.015786	0.958141
$D^* = \sqrt{\frac{(1+j^*)^2 + d^{*2}}{1+d^{*2}}} \frac{1}{1+j^*}$	0.999889	0.75799
$e_{tot} = \frac{S_{max}}{2E_H} (1+j^*) [(1+R) + (1-R)D^*]$	$\frac{S_{max}}{E_H} (1+j^*)$	$\frac{S_{max}}{2E_H} (1+j^*) [(1+R) + (1-R) \cdot 0.75799]$
$s_e(R) = \frac{1}{2} S_{max} [1+R + (1-R)D^*]$	$S_{max}$	$\frac{1}{2} S_{max} [1+R + (1-R) \cdot 0.75799]$

Može se uočiti da je za  $h=0$  (videti tab. 1)  $d$  suviše malo da bi se dostigla zamorna čvrstoća, dok amplituda totalne dilatacije dostiže maksimalnu vrednost. Međutim, pod istom relativnom frekvencijom  $d$ , uticaj odnosa masa  $h=3683$  na zamornu čvrstoću i amplitudu totalne dilatacije jeste značajan, zahvaljujući dinamičkom koeficijentu koji je sada  $D^*=0.75799$ .

U tabeli 2. prikazane su vrednosti relativnog viskozno-g prigušenja, dinamičkih koeficijenata i

The fact is (see Tab. 1) that  $d$  is too small to achieve the fatigue strength when  $h=0$  and the total strain amplitude has maximum value. However, under the same relative frequency  $d$  the influence of mass ratio  $h=3683$  on fatigue strength and total strain amplitude is significant, because of the dynamic coefficient, that is  $D^*=0.75799$ .

Table 2 gives values of viscous damping ratios, dynamic coefficients and dynamic magnification factors

dinamičkih faktora uvećanja za relativne frekvencije u opsegu od  $d=0.001$  do  $d=100$  i maksimalni odnos masa,  $h=3683$ .

for relative frequencies varying from  $d=0.001$  to  $d=100$  and for the maximal mass ratio,  $h=3683$ .

Tabela 2. Relativna viskozna prigušenja, dinamički koeficijenti i dinamički faktori uvećanja za  $h=3683$   
Table 2. Viscous damping ratios, dynamic coefficients and dynamic magnification factors for  $h=3683$

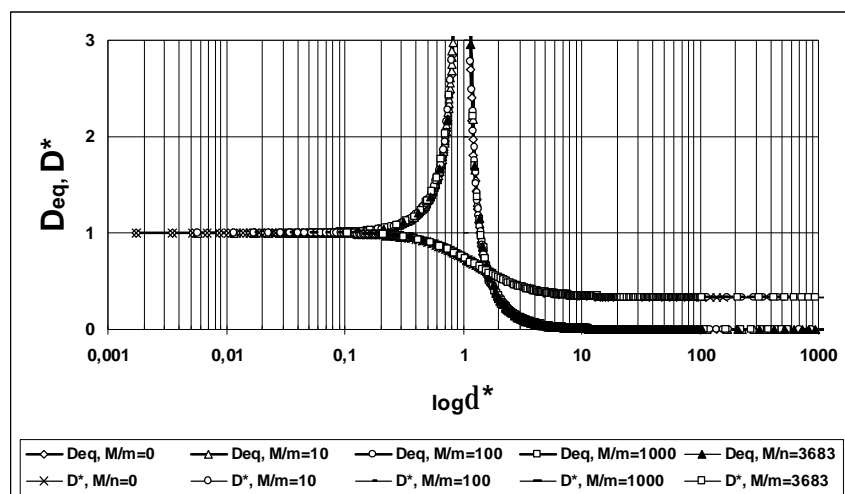
$\delta = \omega_F T_K^D$ Prototype $T_K^D = 0.0000967s$ $f_F = 15Hz$ $\omega_F = 2\pi f_F = 94.25rad/s$ $\delta = 0.009114$	$\delta^* = \delta \sqrt{(1+\varphi)(1+\eta)}$ Prototype $\sigma_P = 142MPa$ $F_A = (19^2 \pi / 4) 142 = 40261N$ $M = F_A / g = 4104kg$ $\eta = M/m = 4104 / 1.114 = 3683$ $\delta^* = 0.958141$	$\xi$	$D^*$	$D_{eq}$
0,001	0,105128	0,003136	0,99513	1,011175
0,002	0,210257	0,003031	0,981003	1,046252
0,003	0,315385	0,002855	0,958949	1,110452
0,004	0,420514	0,00261	0,930825	1,214815
0,005	0,525642	0,002295	0,898648	1,38178
0,006	0,630771	0,001909	0,864291	1,660763
0,007	0,735899	0,001454	0,829296	2,18123
0,008	0,841028	0,000928	0,794822	3,416746
0,009	0,946156	0,000332	0,761662	9,542906
<b>0,009114</b>	<b>0,958141</b>	<b>0,00026</b>	<b>0,75799</b>	<b>12,20001</b>
0,01	1,051285	-0,00033	0,730305	9,505492
0,02	2,10257	-0,01084	0,524489	0,292303
0,03	3,153855	-0,02836	0,438534	0,111749
0,04	4,20514	-0,05287	0,398357	0,059919
0,05	5,256425	-0,08437	0,377039	0,037531
0,06	6,30771	-0,12284	0,364561	0,025761
0,07	7,358994	-0,16826	0,356689	0,018793
0,08	8,410279	-0,22063	0,35143	0,01432
0,09	9,461564	-0,27992	0,347751	0,011277
0,1	10,51285	-0,3461	0,345082	0,009111
1	105,1285	-26,2797	0,333454	8,09E-05
10	1051,285	-102,066	0,333335	8,88E-07
100	10512,85	-105,097	0,333333	9,05E-09

VE dinamički koeficijenti i dinamički faktori uvećanja za pet odnosa masa  $h (0, 10, 100, 1000, 3683)$  prikazani su na sl. 7. Očigledno je da se svi dinamički koeficijenti smanjuju s porastom relativne frekvencije  $d^*$ .

Uočava se porast svih dinamičkih faktora uvećanja s porastom relativne frekvencije u oblasti  $0.001 < d^* \leq 1$ . Međutim, za negativne vrednosti  $x (d^* \geq 1)$ , svi faktori opadaju s porastom relativne frekvencije. Za maksimalni odnos masa,  $h=3683$  dobija se  $D_{eq}=12.20$ , dok je za  $h=1000$  vrednost  $D_{eq}=37.00$ . Maksimalna veličina dinamičkog faktora uvećanja  $D_{eq}=1113.76$  se dobija za  $h=10$ . U ovom slučaju je relativna frekvencija,  $d^*=0.999554$ , veoma bliska svojoj vrednosti pri rezonanci.

The VE dynamic coefficients and dynamic magnification factors for five mass ratios  $h (0, 10, 100, 1000, 3683)$  are shown in Fig. 7. It is obvious that all dynamic coefficients decrease with respect to relative frequencies,  $d^*$ .

It is seen that all dynamic magnification factors increase with respect to relative frequencies,  $0.001 < d^* \leq 1$ . Note, however, that all factors decrease for negative values of  $x (d^* \geq 1)$ . The corresponding value for maximum mass ratio,  $h=3683$  is  $D_{eq}=12.20$ , while for  $h=1000$  it is found that  $D_{eq}=37.00$ . Note that the dynamic magnification factor has maximal value of  $D_{eq}=1113.76$  for  $h=10$ . In this case the relative frequency,  $d^*=0.999554$ , is very close to its value in the case of resonance.



Slika 7. Zavisnost dinamičkih koeficijenata i dinamičkih faktora uvećanja od relativne frekvencije  
 Figure 7. Frequency dependence of dynamic coefficients and dynamic magnification factors

### 3.3.3 Niskociklični zamor za jednostavan RDA model

Razni predloženi algoritmi za otkrivanje oštećenja usled zamora zasnivaju se na različitim fizičkim i mehaničkim principima. Ovde je prikazan algoritam za otkrivanje oštećenja jednostavnog RDA modela, zasnovan na promenama koeficijenta tečenja i relativne frekvencije. Pad čvrstoće i krutosti pod ponavljanim neelastičnim cikličnim opterećenjem naziva se niskociklični zamor. On se ovde analizira za istoriju plastičnog tečenja koje se odvija u više koraka, videti jednačinu (25)

$$s_{max}^{(1)} = \frac{142(1+2)+187(1+2)[(1+2)-1]}{2(1+2)} = 258MPa, \quad e_v^{(1)} = (1+2)0.000676 = 0.002029,$$

$$s_{max}^{(2)} = \frac{142(1+2 \cdot 2)+187(1+2)[2(1+2 \cdot 2)-1]}{2 \cdot 2(1+2 \cdot 2)} = 288MPa,$$

$$s_{max}^{(3)} = \frac{142(1+3 \cdot 2)+187(1+2)[3(1+3 \cdot 2)-1]}{3 \cdot 2(1+3 \cdot 2)} = 291MPa.$$

Gorenavedene vrednosti napona upotrebljene su kao maksimalne apsolutne vrednosti napona u ciklusima. Rezultati proračuna granica izdržljivosti, amplituda totalne dilatacije i indeksa duktilnog oštećenja za tri srednja napona  $\sigma_0$  prikazani su u tab. 3.

Indeksi duktilnog oštećenja, za tri srednja napona, prikazani su na sl. 8. kao funkcija koeficijenta tečenja  $j_{vp}$  i relativne frekvencije  $d=0.009114$ .

Očigledan je veliki uticaj koeficijenta tečenja, kao i porast indeksa duktilnog oštećenja pri smanjenju veličine srednjeg napona.

### 3.3.3 Low-cycle fatigue for single RDA model

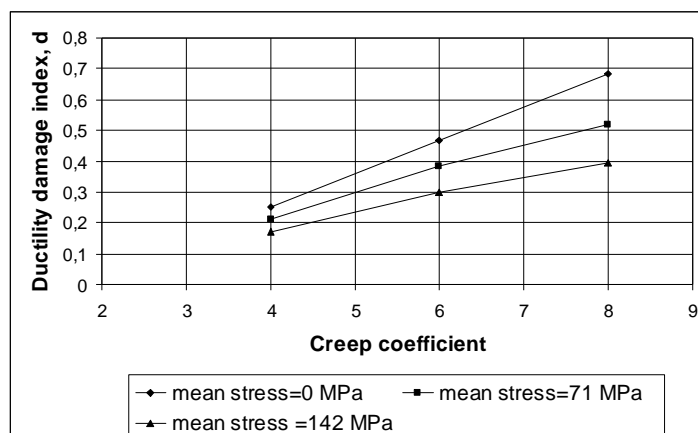
Various damage detection algorithms have been proposed based on different physical and mechanical principles. Damage detection algorithm of a single RDA model, based on changes in creep coefficient and relative frequency, is presented here. The degradation of strength and stiffness under repeated inelastic cyclic loading is called low-cycle fatigue. It is analyzed here under the following multi-step history for plastic yielding, see Eq. (25)

Above stresses are used as maximum absolute stresses in cycles. The results of computations of endurance limits, total strain amplitudes and ductility damage indexes for three mean stresses  $\sigma_0$  are presented in Tab. 3.

Ductility damage indexes are shown in Fig. 8 for three mean stresses as a function of creep coefficients  $j_{vp}$  and relative frequency  $d=0.009114$ . The great influence of creep coefficients is obvious, also that if the mean stress is lower, ductility damage index will be greater.

Tabela 3. Granice izdržljivosti, amplituda totalne dilatacije i indeksi duktilnog oštećenja  
Table 3. Endurance limits, total strain amplitudes and ductility damage indexes

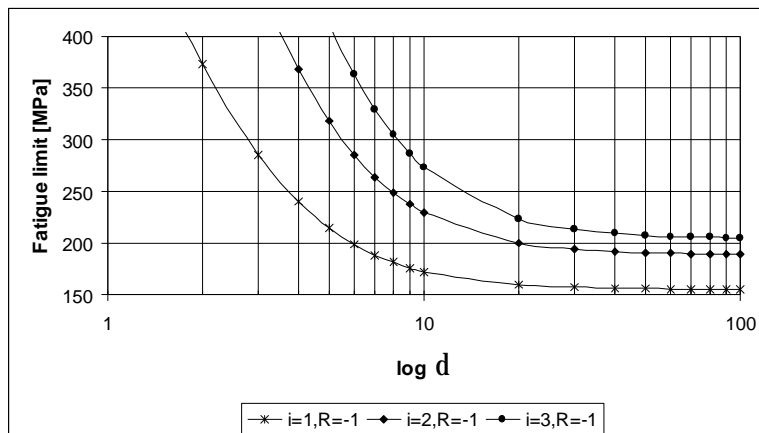
$\sigma_P=142$ MPa, $\delta=0.009114$ , $\varphi^*=2$ , $\sigma_Y=258$ MPa, $\varepsilon_Y=0.002029$ , $\varepsilon_{ul}=0.018257$			
	$i=1$ , $\varphi_{VP}=4$	$i=2$ , $\varphi_{VP}=6$	$i=3$ , $\varphi_{VP}=8$
$\sigma_{max}$ [MPa]	258	288	291
$\sigma_0=0$ MPa	R=-1	R=-1	R=-1
	$\sigma_A=258$	$\sigma_A=288$	$\sigma_A=291$
	$\sigma(R)(\delta \rightarrow 100)=154.8$	$\sigma(R)(\delta \rightarrow 100)=188.57$	$\sigma(R)(\delta \rightarrow 100)=204.33$
	$\varepsilon_{tot}=0.006143$	$\varepsilon_{tot}=0.009600$	$\varepsilon_{tot}=0.013095$
	<b>d=0.253486</b>	<b>d=0.466536</b>	<b>d=0.681902</b>
$\sigma_0=71$ MPa	R=-0.44961	R=-0.50694	R=-0.51203
	$\sigma_A=187$	$\sigma_A=217$	$\sigma_A=220$
	$\sigma(R)(\delta \rightarrow 100)=183.20$	$\sigma(R)(\delta \rightarrow 100)=213.08$	$\sigma(R)(\delta \rightarrow 100)=225.48$
	$\varepsilon_{tot}=0.005467$	$\varepsilon_{tot}=0.008248$	$\varepsilon_{tot}=0.010443$
	<b>d=0.211834</b>	<b>d=0.383199</b>	<b>d=0.518474</b>
$\sigma_0=142$ MPa	R=0.10078	R=-0.01389	R=-0.02405
	$\sigma_A=116$	$\sigma_A=146$	$\sigma_A=149$
	$\sigma(R)(\delta \rightarrow 100)=211.6$	$\sigma(R)(\delta \rightarrow 100)=237.6$	$\sigma(R)(\delta \rightarrow 100)=246.62$
	$\varepsilon_{tot}=0.004790$	$\varepsilon_{tot}=0.006895$	$\varepsilon_{tot}=0.008414$
	<b>d=0.170166</b>	<b>d=0.299865</b>	<b>d=0.393469</b>



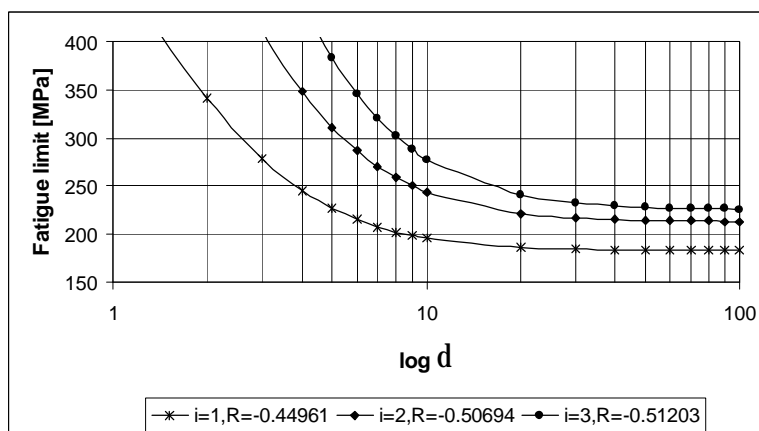
Slika 8. Uticaj srednjeg napona na indeks duktilnog oštećenja u funkciji koeficijenta tečenja  
Figure 8. The influence of mean stress on ductility damage index as a function of creep coefficients

U ranijem radu prvog autora [5], primećeno je da usvajanje granice izdržljivosti kao indikatora oštećenja, zahvaljujući osetljivosti zamorne čvrstoće na promene relativne frekvencije, zahteva relativnu frekvenciju  $\delta \sim 100$ . Rezultati za zamornu čvrstoću prikazani su u polulogaritamskim dijagramima na sl. 9, pri čemu su veličine napona nanete na ordinatu, dok su vrednosti relativne frekvencije na apsici. Krive postaju horizontalne kada je  $\delta \rightarrow 100$  za sve sračunate vrednosti, što pokazuje dobro definisane granice izdržljivosti, tabulisane u tab. 3.

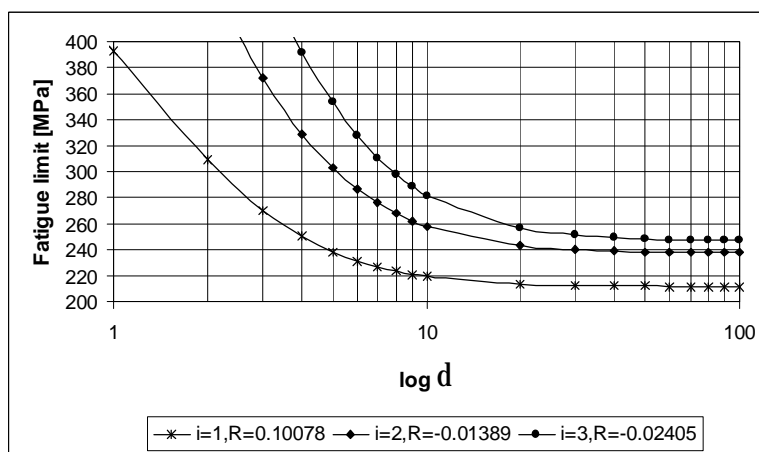
From the previous work of the first author [5], using endurance limits as the indicator of damage, it is considered that sensitivity of frequency changes to fatigue strength requires relative frequency  $\delta \sim 100$ . The results of fatigue strengths are drawn using semi logarithmic diagram, in which values of stress are plotted as ordinates and values of relative frequency as abscissas, as shown in Figs. 9. Curves become horizontal when  $\delta \rightarrow 100$  for all calculated values, thus indicating a well-defined endurance limits, that are tabulated in Tab. 3.



a) Srednji napon  $\sigma_0=0$  MPa  
 a) Mean stress  $\sigma_0=0$  MPa



b) Srednji napon  $\sigma_0=71$  MPa  
 b) Mean stress  $\sigma_0=71$  MPa



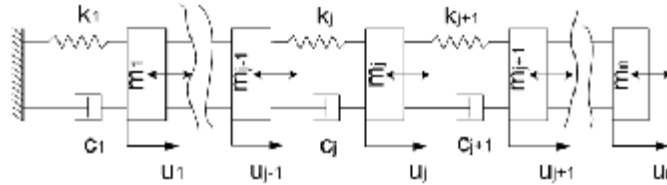
c) Srednji napon  $\sigma_0=142$  MPa  
 c) Mean stress  $\sigma_0=142$  MPa

Slika 9. RDA krive zamora čelične šipke za tri veličine srednjeg napona  
 Figure 9. The RDA fatigue curves of steel rod for three mean stresses

## 4 MODEL OŠTEĆENJA USLED ZAMORA ZA ŠTAPOVE S VIŠE STEPENI SLOBODE (VSS)

### 4.1 Jednačine diskretnog VSS sistema

Koncept koji je razvijen za JSS sistem pomaže u razumevanju dinamičkog ponašanja linijskih konstrukcija uopšte. U uobičajenom predstavljanju sistema s više stepeni slobode, prikazanog na sl. 10, svakoj masi omogućeno je kretanje samo u X-pravcu.



Slika 10. VSS model  
Figure 10. MDOF model

Zbog ovoga, pomeranje  $u_j$  (mereno u odnosu na položaj pri statičkoj ravnoteži) definiše trenutni položaj mase  $m_{eqj}$ . Jednačina kretanja mase  $m_{eqj}$  glasi

$$m_{eqj} \ddot{u}_j + c_{eqj} (\dot{u}_j - \dot{u}_{j-1}) + c_{eqj+1} (\dot{u}_j - \dot{u}_{j+1}) + k_{eqj} (u_j - u_{j-1}) + k_{eqj+1} (u_j - u_{j+1}) = F_j(t) \quad (56)$$

Postoji  $n$  jednačina sličnih jednačini (56). Radi prilagođavanja različitim tipovima štapnih konstrukcija, može se napisati opšta matricna jednačina VSS sistema

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) = \hat{\mathbf{F}}\mathbf{g}(t) \quad (57)$$

### 4.2 Svojsvene vrednosti RDA modela

Modalna analiza jeste primarno sredstvo za modeliranje dinamičkih karakteristika konstrukcija. Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina jednoaksijalne dilatacije  $\epsilon(t)$  dugog tankog prizmatičnog štapa – videti jednačinu (7), ima sledeći oblik

$$m\ddot{\epsilon}(t) + c\dot{\epsilon}(t) + k\epsilon(t) = 0$$

gde je  $c=(m/T_K+T_Kk)$  prigušenje.

Očigledno je da se za VSS model sa sl. 10. može napisati

$$m\ddot{\epsilon}(t) + \left( \frac{1}{T_K} m + T_K k \right) \dot{\epsilon}(t) + k\epsilon(t) = 0 \quad (58)$$

U analizi deformacija, koje se mogu slobodno pojaviti, pretpostavlja se da se sve dilatacije menjaju u vremenu prema RDA opštem rešenju (prigušenje veće od kritičnog), videti: Milašinović [6]

$$\epsilon(t) = \hat{\epsilon} e^{-\frac{1}{T^*}t}, \quad \dot{\epsilon}(t) = -\frac{1}{T^*} \hat{\epsilon} e^{-\frac{1}{T^*}t}, \quad \ddot{\epsilon}(t) = \frac{1}{T^{*2}} \hat{\epsilon} e^{-\frac{1}{T^*}t} \quad (59)$$

Unošenjem izraza za dilataciju i njene izvode po vremenu u jednačinu (58) dobija se

## 4 FATIGUE DAMAGE MODEL FOR MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) RODS

### 4.1 Discrete MDOF viscoelastic equations

The concept, developed for a SDOF system, assists in the understanding of the dynamic behaviour of rod structures in general. In the conventional representation of a system, shown in Fig. 10, with several DOF, each mass is constrained to move only in the X-direction.

Thus the displacement  $u_j$  (measured from the position of static equilibrium) defines the instantaneous position of mass  $m_{eqj}$ . The equation of motion for mass  $m_{eqj}$  is

There are  $n$  equations similar to Eq. (56). In order to accommodate to different types of a rod structure, the general matrix equation of the MDOF system may be considered

### 4.2 Eigenvalues of the RDA model

Modal analysis is primarily a tool for modelling dynamic characteristics of structures. The corresponding homogeneous differential equation of homogeneous uniaxial strain  $\epsilon(t)$  of a thin long symmetrical rod, see Eq. (7), take the form of

where  $c=(m/T_K+T_Kk)$  is damping.

Obviously, for the MDOF model of Fig. 10 can be defined

In the analysis of strains, which can appear freely, it is presupposed that all strains alter in time according to the RDA complementary solution (overdamped case) of strain, see Milašinović [6]

Substitution of the strain and its time derivatives into Equation (58) yields



$$\left(\frac{1}{T^{*2}} - \frac{1}{T_K T^*}\right) \mathbf{m} \hat{\mathbf{e}} + \left(1 - \frac{T_K}{T^*}\right) \mathbf{k} \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \quad (60)$$

ili

or

$$\left(\mathbf{k} - \frac{1}{T_K T^*} \mathbf{m}\right) \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \quad (61)$$

Ovo je RDA problem svojstvenih vrednosti, iz kojeg se kao rezultat dobijaju svojstvene vrednosti i odgovarajući svojstveni vektori. Imajući na umu da se relativno viskozno prigušenje  $x_j$  definiše kao odnos prigušenja u tonu  $j$  i kritičnog prigušenja tona, RDA model štapa mora se dovesti u stanje kritičnog prigušenja, gde je:  $E_K I_K = H' I_N$  ( $I_K = E_K T_K$ ,  $I_N = H' T^*$ ,  $T_K = T^* = T_K^D$ ). Odavde se može formulirati sledeći RDA problem svojstvenih vrednosti

This is the RDA eigenvalue problem, so that eigenvalues and corresponding eigenvectors are obtained as results. Having in mind that viscous damping ratio  $x_j$  is defined as the ratio of the damping in mode  $j$  to the critical damping of the mode, the RDA model of a rod must be turned into the state of critical damping, where:  $E_K I_K = H' I_N$  ( $I_K = E_K T_K$ ,  $I_N = H' T^*$ ,  $T_K = T^* = T_K^D$ ). Therefore, the following RDA eigenvalue problem is formulated

$$\left(\mathbf{k} - \frac{1}{(T_K^D)^2} \mathbf{m}\right) \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \quad (62)$$

$T_{K,1}^D > T_{K,2}^D > T_{K,3}^D \dots > T_{K,n}^D$  jesu karakteristična vremena (dinamička vremena retardacije) sistema iz kojih se mogu odrediti relativna viskozna prigušenja

$T_{K,1}^D > T_{K,2}^D > T_{K,3}^D \dots > T_{K,n}^D$  are the characteristic times (dynamic times of retardation) of a system from which the viscous damping ratios may be obtained

$$x_j = \frac{j_j^* d_j (1 - d_j^{*2})}{2 d_j^* (1 + d_j^2 + j_j^*)} \quad (63)$$

gde su  $d_j = T_{K,j}^D w_F$ ,  $d_j^* = w_F / w_j^*$ , dok je  $w_F$  frekvencija pobude.

where  $d_j = T_{K,j}^D w_F$ ,  $d_j^* = w_F / w_j^*$  and  $w_F$  is excitation frequency.

Unošenjem relativnog viskoznog prigušenja  $x_j$  u  $j$ -tu jednačinu sistema, možemo ih sve rešiti.

Introducing the viscous damping ratio  $x_j$  in the  $j^{\text{th}}$  equation of the set of decoupled equations, we can solve all of them.

### 4.3 Viskoelastičan štap s dva stepena slobode (DSS)

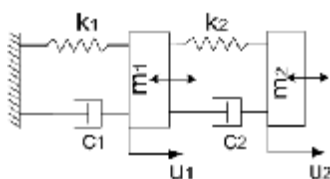
### 4.3 Two-degree-of-freedom (TDOF) viscoelastic rod

#### 4.3.1 Svojstvene vrednosti RDA modela

#### 4.3.1 Eigenvalues of the RDA model

Potrebne su ukupno dve koordinate da bi se odredio položaj modela na sl. 11; to je DSS model.

Model shown in Fig. 11 requires altogether two coordinates to specify its position; it is TDOF model.



Slika 11. Viskoelastični RDA DSS model  
Figure 11. TDOF viscoelastic RDA model

Jednačine kretanja su date sa

The equations of motion are given by

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + (k_2 + k_1) u_1 - k_2 u_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2 - k_2 u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

a karakteristična jednačina je

and the characteristic equation is

$$I_{1/2} = \frac{k_1 + k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}} \quad (65)$$

Karakteristična vremena se mogu odrediti iz

The characteristic times may be obtained as follows

$$T_{K,1/2}^D = \sqrt{1/I_{1/2}} \quad (66)$$

Ako je  $m_1=m_2=m/2$  i  $k_1=k_2=2k$ , dobijaju se sledeće karakteristične vrednosti

If  $m_1=m_2=m/2$  and  $k_1=k_2=2k$  the following eigenvalues yield

$$I_{1/2} = (6 \pm \sqrt{20}) k / m$$

a iz jednačine (66) – sledeća karakteristična vremena

and Eq. (66) gives the following characteristic times

$$T_{K,1}^D = 0.309017 T_K^D, \quad T_{K,2}^D = 0.809017 T_K^D$$

gde  $T_K^D$  predstavlja karakteristično vreme pojedinačnog RDA modela.

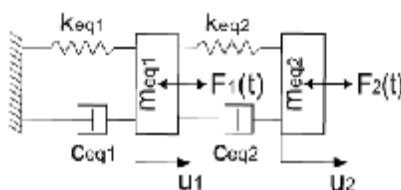
where  $T_K^D$  represents a characteristic time of a single RDA model.

#### 4.3.2 Dinamički koeficijenti čelične šipke s dve jednake koncentrisane mase

#### 4.3.2 Dynamic coefficients of steel rod with two equal lumped elements of mass

Veličine parametara čelične šipke prikazane su u tab. 2. Viskoelastičan RDA DSS sistem:  $m_{eq1}=m_{eq2}=m_{eq}/2$ ,  $k_{eq1}=k_{eq2}=2k_{eq}$ ,  $j_1=j_2=j=2$ , prikazan na sl. 12, opterećen je cikličnim sinusoidalnim opterećenjem simetričnog ciklusa:  $f_{F1}=f_{F2}=15\text{Hz}$  i  $w_{F1}=w_{F2}=w_F=2\pi \times 15=94.25\text{rad/s}$ .

Values of parameters of steel rod appear in Tab. 2. The TDOF viscoelastic RDA system:  $m_{eq1}=m_{eq2}=m_{eq}/2$ ,  $k_{eq1}=k_{eq2}=2k_{eq}$ ,  $j_1=j_2=j=2$ , which is shown in Fig. 12, is loaded with cyclic sinusoidal loads in symmetrical cycle:  $f_{F1}=f_{F2}=15\text{Hz}$  and  $w_{F1}=w_{F2}=w_F=2\pi \times 15=94.25\text{rad/s}$ .



Slika 12. Viskoelastična DSS čelična šipka s dve jednake koncentrisane mase  
Figure 12. TDOF viscoelastic steel rod with two equal lumped element of mass

Karakteristična vremena sračunata su u delu 4.3.1. Odatle sledi

The characteristic times are calculated in paragraph 4.3.1. Thus

$$\delta_1 = T_{K,1}^D \omega_F = 0.309017 \delta = 0.002816, \quad \delta_2 = T_{K,2}^D \omega_F = 0.809017 \delta = 0.007373 \quad \delta = 94.25 T_K^D = 94.25 \cdot 0.0000967 = 0.009114.$$

Prirodna frekvencija sistema sledi iz jednačine (65)

The natural frequencies of a system are available from the Eq. (65) as follows

$$w_{1/2}^* = \sqrt{I_{1/2}} \quad (67)$$

gde je

where

$$I_{1/2} = (6 \pm \sqrt{20}) \frac{k_{eq}}{m_{eq}}, \quad k_{eq} = \frac{k}{1+j} = \frac{k}{1+2} = \frac{k}{3}, \quad m_{eq} = m + M = 4105.114 \text{ kg},$$

$$I_1 = (6 + \sqrt{20}) \frac{k}{3 \cdot 4105.114} = 0.000850332 \cdot 119.08 \cdot 10^6 = 101257.60, \quad w_1^* = 318.21,$$

$$I_2 = (6 - \sqrt{20}) \frac{k}{3 \cdot 4105.114} = 0.000124061 \cdot 119.08 \cdot 10^6 = 14773.28, \quad w_2^* = 121.55.$$

Odavde

Thus

$$d_1^* = \frac{w_F}{w_1^*} = \frac{94.25}{318.21} = 0.296188, \quad d_2^* = \frac{w_F}{w_2^*} = \frac{94.25}{121.55} = 0.775401$$

Prema jednačini (63), relativna viskozna prigušenja jesu

According to Eq. (63), the viscous damping ratios are as follows

$$x_1 = \frac{j_1^* d_1 (1 - d_1^{*2})}{2d_1^* (1 + d_1^2 + j_1^*)} = 0.002892, \quad x_2 = \frac{j_2^* d_2 (1 - d_2^{*2})}{2d_2^* (1 + d_2^2 + j_2^*)} = 0.001264$$

Oba relativna prigušenja ovog sistema manja su od 0.003. To pokazuje da su delovi šipke u viskoelastičnom stanju, što je u saglasnosti s polaznom pretpostavkom. Razdvojene jednačine kretanja su:

Both damping coefficients of this dynamical system are lower than 0.003 and they show that rod parts are in the stage of viscoelasticity, which is in correspondence with the starting hypothesis. Then decoupled equations of motion are:

$$\ddot{w}_1(t) + 1.841\dot{w}_1(t) + 318.21^2 v_1(t) = \Phi^T \hat{F} g(t) = N_1(t)$$

$$\ddot{w}_2(t) + 0.308\dot{w}_2(t) + 121.55^2 v_2(t) = \Phi^T \hat{F} g(t) = N_2(t)$$

gde su:  $\hat{F}$  prostorni vektor,  $g(t)$  vremenska funkcija i  $u(t)$  rešenje u prvobitnim koordinatama

in which:  $\hat{F}$  is a space vector,  $g(t)$  is a time function and  $u(t)$  is the solution in terms of the original coordinate

$$u(t) = \Phi v(t)$$

Međutim, relativna prigušenja nisu međusobno jednaka čak ni kada se ukupna masa podeli na dva jednaka dela. Dinamika konstrukcija obično usvaja konstantnu vrednost za sve elemente. VE dinamički koeficijenti (čvrstoće na zamor) elemenata takođe su različiti, kao što je prikazano u Tab. 4.

However, the damping coefficients are not equal even though the total mass is divided into two equal parts. Structural dynamics commonly adopts a constant value for all elements. VE dynamic coefficients (fatigue strengths) are also different per elements, as shown in Table 4.

Tabela 4. Dinamički koeficijenti šipke s dve jednake koncentrisane mase  
Table 4. Dynamic coefficients of a rod with two equal lumped element of mass

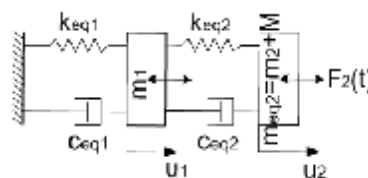
	Deo 1 Part 1	Deo 2 Part 2
$d^*$	0.296188	0.755401
$D^* = \sqrt{\frac{(1+j^*)^2 + d^{*2}}{1+d^{*2}}} \frac{1}{1+j^*}$	0.963488	0.816232

#### 4.3.3 Dinamički koeficijenti čelične šipke s jednom koncentrisanom masom

#### 4.3.3 Dynamic coefficients of steel rod with one lumped element of mass

Viskoelastičan RDA DSS sistem:  $m_1=m/2$ ,  $m_{eq2}=m/2+M$ ,  $k_{eq1}=k_{eq2}=2k_{eq}$ ,  $j_1^*=j_2^*=j=2$ , prikazan na sl. 13, opterećen je cikličnim sinusoidalnim opterećenjem simetričnog ciklusa:  $f_{F2}=15\text{Hz}$  i  $w_{F2}=94.25\text{rad/s}$ .

The TDOF viscoelastic RDA system:  $m_1=m/2$ ,  $m_{eq2}=m/2+M$ ,  $k_{eq1}=k_{eq2}=2k_{eq}$ ,  $j_1^*=j_2^*=j=2$ , which is shown in Fig. 13, is loaded with cyclic sinusoidal loads in symmetrical cycle:  $f_{F2}=15\text{Hz}$  and  $w_{F2}=94.25\text{rad/s}$ .



Slika 13. Viskoelastična DSS čelična šipka s jednom koncentrisanom masom  
Figure 13. TDOF viscoelastic steel rod with one lumped element of mass

Relativne frekvencije sračunate su u delu 4.3.2.:  $d_1=0.002816$ ,  $d_2=0.007373$ . Prirodna frekvencija nalazi se iz jednačina (65) i (67)

The relative frequencies are calculated in paragraph 4.3.2.:  $d_1=0.002816$ ,  $d_2=0.007373$ . The natural frequencies are available from Eqs. (65) and (67)

$$I_{1/2} = \frac{k_{eq1} + k_{eq2}}{2m_1} + \frac{k_{eq2}}{2m_{eq2}} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{k_{eq1} + k_{eq2}}{m_1} + \frac{k_{eq2}}{m_{eq2}} \right)^2 - \frac{k_{eq1}k_{eq2}}{m_1m_{eq2}}}$$

$$I_1 = 285060537.7 \Rightarrow w_1^* = 16883.73589, \quad I_2 = 9671.1 \Rightarrow w_2^* = 98.34175.$$

Odatle

Thus

$$d_1^* = \frac{w_F}{w_1^*} = \frac{94.25}{16883.74} = 0.005582, \quad d_2^* = \frac{w_F}{w_2^*} = \frac{94.25}{98.34175} = 0.958393.$$

Prema jednačini (63), relativna viskozna prigušenja jesu:

According to Eq. (63) the viscous damping ratios are:

$$x_1 = \frac{j_1^* d_1 (1 - d_1^{*2})}{2d_1^* (1 + d_1^{*2} + j_1^*)} = 0.168168, \quad x_2 = \frac{j_2^* d_2 (1 - d_2^{*2})}{2d_2^* (1 + d_2^{*2} + j_2^*)} = 0.000209.$$

Iako su vrednosti kružnih frekvencija  $w^*$  na kraju šipke, modelirane kao JSS i DSS sistem, praktično jednake (98.365~98.342), rezultati vibracija ova dva sistema će se međusobno značajno razlikovati, budući da je ovaj deo, na osnovu relativnog prigušenja od 16.8168% dela 1 šipke modelirane kao DSS sistem, ušao u oblast plastičnih deformacija. Dinamički koeficijent dela 1 (videti tab. 5) vrlo je blizak jedinici.

Even if the values of circular frequencies  $w^*$  at the end of the rod, modelled as a SDOF and a TDOF system, are practically the same (98.365~98.342), the vibration results for these two systems will vary considerably since, based on the damping coefficient of 16.8168% in part 1 of the rod modelled as a TDOF, it has undergone plastic deformation. Dynamic coefficient of part 1, see Tab. 5, is very close to 1.

Tabela 5. Dinamički koeficijenti šipke s jednom koncentrisanom masom  
Table 5. Dynamic coefficients of the rod with one lumped element of mass

	Deo 1 Part 1	Deo 2 Part 2
$d$	0.005582	0.958393
$D^* = \sqrt{\frac{(1+j^*)^2 + d^{*2}}{1+d^{*2}}} \frac{1}{1+j^*}$	0.999986	0.757913

Ovo znači da je relativna frekvencija 0.005582 premala da bi se dostigla čvrstoća na zamor ovog dela šipke. Međutim, pod istim brojem ciklusa, ali s relativnom frekvencijom 0.958393 u delu 2, uticaj odnoša masa na zamornu čvrstoću je veoma značajan, sa  $D^*=0.757913$ , što je veoma blizu vrednosti  $D^*=0.75799$  u JSS sistemu (videti poglavlje 3.3.2.).

U tabeli 6. uporedo su dati rezultati za tri različita dinamička sistema čelične šipke.

U RDA sistemu 2, relativno prigušenje dela 1 šipke je 16.8168%, što znači da je u stanju VEP deformisanja. U isto vreme, deo 2 je u viskoelastičnom stanju, s relativnim prigušenjem 0.000209. Zbog toga se moraju utvrditi dinamički parametri DSS sistema koji odgovaraju različitim vrstama dinamičke ravnoteže delova štapa. To je predmet sledećeg odeljka.

U radu prvog autora [7], ista čelična šipka modelirana je kao jedan RDA sistem, koji na gornjoj granici tečenja ima relativno prigušenje 4.65%.

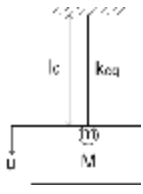
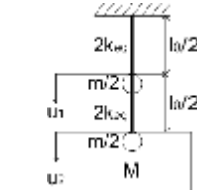
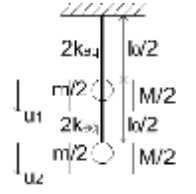
This means that relative frequency of 0.005582 is too small to achieve the fatigue strength for this part of the rod. However, under the same number of cycles but relative frequency of 0.958393 in part 2, the influence of mass ratio on fatigue strength is very significant, with  $D^*=0.757913$  that is very close to  $D^*=0.75799$  in a SDOF system, see paragraph 3.3.2.

Table 6 shows comparable results for three different dynamical systems of steel rod.

In the RDA system 2, the damping coefficient of part 1 of the rod is 16.8168%, which means that it is in the stage of VEP deforming. At the same time part 2 of the rod is in the stage of viscoelasticity, having a damping coefficient of 0.000209. Therefore, dynamical parameters of the TDOF system which include different stages of dynamical equilibrium of the rod parts must be determined. That is the subject of the next section.

In the paper of the first author [7] the same steel rod is modelled as a single RDA system, which on the upper yield point has damping coefficient of 4.65%.

Tabela 6. Dinamički parametri tri različita RDA sistema čelične šipke  
Table 6. Dynamic parameters of three different RDA systems of steel rod

$l_0=0.5\text{m}, k=119.08 \times 10^9 \text{N/m}, k_{eq}=k/3, m=1.114\text{kg}, M=4104\text{kg}$			
RDA sistem	1	2	3
			
$\omega$ [rad/s]	$\omega^*=98.365$	$\omega_1^*=16883.736$ $\omega_2^*=98.342$	$\omega_1^*=318.210$ $\omega_2^*=121.550$
$\delta^*$	$\delta^*=0.958141$	$\delta_1^*=0.005582$ $\delta_2^*=0.958393$	$\delta_1^*=0.296188$ $\delta_2^*=0.775401$
$\xi$	$\xi=0.000260$	$\xi_1^*=0.168168$ $\xi_2^*=0.000209$	$\xi_1^*=0.002892$ $\xi_2^*=0.001264$
$D^*$	$D^*=0.757990$	$D_1^*=0.999986$ $D_2^*=0.757913$	$D_1^*=0.963488$ $D_2^*=0.816232$
$c_{eq}=2\xi^*/k_{eq}m_{eq}$ [Ns/m]	$c=209.91$	$c_1=2236.53$ $c_2=238.56$	$c_1=2335.41$ $c_2=1021.71$

## 5 PROJEKTOVANJE VISKOELASTOPLASTIČNIH ŠTAPOVA

### 5.1 Provera globalne konvergencije za različita VEP stanja dinamičke ravnoteže

U odeljku 4.3, pokazano je da se za različite RDA sisteme za opisivanje iste čelične šipke dobijaju različite vrednosti relativnog viskoznog prigušenja u pojedinim delovima šipke, u zavisnosti od mesta vešanja mase  $M$ . Na primer, u dinamičkom sistemu 2, masa  $M$  je na donjem kraju šipke i relativno prigušenje ovog dela šipke je malo ( $x_2=0.000209$ ), zbog velike vrednosti količnika priključene mase  $M$  i mase dela šipke,  $M/(m/2)=4104/0.557=7368$ . U istom sistemu gornji deo štapa praktično prigušuje vibracije sistema, s visokim relativnim prigušenjem:  $0.168168$ . U sistemu 3 priključena masa podeljena je na dva jednaka dela duž šipke, tako da oba dela doprinose prigušenju vibracija sistema sa znatno višim relativnim prigušenjima ( $0.002892$  i  $0.001264$ ), zbog daleko povoljnijeg odnosa mase tega i šipke (amortizera)  $(M/2)/(m/2)=2052/0.557=3683$ . Ova relativna prigušenja odgovaraju rezultatima dobijenim za JSS sistem prikazan na sl. 4.

U dinamičkim sistemima 1 i 2 masa  $M$  prikačena je na donjem kraju štapa, pa su vrednosti kružnih i relativnih frekvencija na tom kraju približno jednake, uprkos tome što je sistem 1 analiziran kao JSS, a sistem 2 kao DSS. Međutim, relativna viskozna prigušenja na kraju šipke ( $0.000260$  i  $0.000209$ ) međusobno se razlikuju za 19.62%, dok se na sredini dužine šipke DSS sistema javlja veliko relativno viskozno prigušenje:  $0.168168$ . Ovo pokazuje da je gornji deo šipke sistema 2 u stanju viskoplastičnosti, što je u suprotnosti s polaznom pretpostavkom da je cela šipka viskoelastična. Iz tog razloga, neophodno je korigovati dinamičke parametre DSS sistema, kako bi oni, kao početni para odgovarali različitim stanjima dinamičke ravnoteže delova štapa. Iterativni postupak, koji sledi, upotrebljen

## 5 DESIGN OF VISCOELASTOPLASTIC RODS

### 5.1 Global convergence check for different VEP stages of dynamic equilibrium

In section 4.3, it was seen that different RDA systems for describing the same steel rod produce different values of viscous damping coefficients for its different parts, depending on the place of suspension of weight  $M$ . For instance, in dynamic system 2 weight  $M$  is at the lower end of the rod and the damping coefficient of this part of the rod is low ( $x_2=0.000209$ ), because of the high ratio between the mass of weight  $M$  and the mass of the part of the rod,  $M/(m/2)=4104/0.557=7368$ . In the same system the upper part of the rod practically engages to damp the vibrations in the system at a damping coefficient as high as  $0.168168$ . In system 3 the weight mass is divided into two equal parts along the rod, so both parts participate at considerably higher damping coefficients ( $0.002892$  and  $0.001264$ ), because the ratio between the masses of the weight and the damper is far more favourable  $(M/2)/(m/2)=2052/0.557=3683$ . These damping coefficients correspond to the results obtained for a SDOF system shown in Fig. 4.

In dynamic systems 1 and 2 weights  $M$  is suspended at the lower end of the rod so the values of circular and relative frequencies at that end are very approximate, irrespective of the fact the rod in system 1 was analysed as a SDOF system, while in system 2 it was analysed as a TDOF system. However, the discrepancy ratio between the viscous damping coefficients at the end of the rod ( $0.000260$  and  $0.000209$ ) is 19.62%, while at the centre of the rod in the TDOF system the viscous damping coefficient is as high as  $0.168168$ . This shows that the upper part of the rod in system 2 is in the state of viscoplasticity, which is in opposition with the initial hypothesis that the whole rod is viscoelastic. Therefore, it is necessary to correct the dynamic parameters of a TDOF model, in order that they, as the initial parameters

je za proračun stanja dinamičke ravnoteže za gornji deo šipke, koji je ušao u oblast VEP deformacije. Parametar koji definiše promene stanja dinamičke ravnoteže jeste ekvivalentna krutost  $k_{eq}=k/(1+j_{vp})$ , što znači da se VP koeficijent tečenja mora odrediti za ciljana stanja dinamičke ravnoteže gornjeg dela štapa. Ovaj koeficijent može se izračunati korišćenjem izraza datog od strane prvog autora, [7]

$$j_{vp,1/2} = \pm \sqrt{8I_0^2 x_{eq} \frac{1}{A(1-R)^2} - 1} - 1 \quad (68)$$

gde je  $x_{eq}=x$  relativno viskozno prigušenje, videti jednačinu (44).

Relativno prigušenje prve iteracije je  $x_{eq}=0.168168$ , što omogućava proračun, redom:  $j_{vp1}$ ,  $k_{eq1}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $w_1^*$ ,  $w_2^*$ ,  $d_1^*$ ,  $d_2^*$ ,  $x_1$ , i  $x_2$ . Relativno prigušenje  $x_1$ , određeno u prvoj iteraciji, koristi se u drugoj iteraciji za sračunavanje novog VP koeficijenta tečenja  $j_{vp}$  i koeficijenta krutosti  $k_{eq}$ . Ovaj postupak ponavlja se sve dok razlika između relativnih prigušenja, sračunatih u dve uzastopne iteracije, ne postane zanemarljivo mala. U ovom delu biće opisan postupak koji se zasniva na proveru globalne konvergencije. Konkretno, može se pretpostaviti da su uslovi dinamičke ravnoteže postignuti ukoliko je

$$\frac{\sum_{i=1}^e |(Dx^n)_i|}{\sum_{i=1}^e |(Dx^1)_i|} \cdot 100 \leq e' \quad (69)$$

gde  $e$  označava ukupan broj elemenata (delova) štapa, a  $||$  označava apsolutnu vrednost. Množenje faktorom 100 na levoj strani izraza (69) omogućava da se usvojeni faktor tolerancije  $e'$  izrazi kao procentualna vrednost. Uslov konvergencije (69) tvrdi da se može smatrati da je stanje dinamičke ravnoteže postignuto ako je zbir apsolutnih vrednosti priraštaja relativnog viskoznog prigušenja bilo kog koraka ( $n$ ) manji ili jednak  $e'$  puta uvećanoj odgovarajućoj vrednosti prvog koraka. Za praktičnu upotrebu je vrednost  $e' \leq 1.0\%$  obično odgovarajuća.

Dobijeni ulazni dinamički parametri u dinamičkoj modalnoj analizi odgovaraju različitim stanjima dinamičke ravnoteže delova štapa.

## 5.2 Štap konstantnog poprečnog preseka

Primenu prethodno opisanog postupka za proračun dinamičkih parametara štapova, koji su prošli kroz različita stanja deformacije u konstrukciji, počecemo na štapovima konstantnog poprečnog preseka. Ulazni podaci za prvu iteraciju dati su u tab. 6, a odnose se na DSS sistem sa oznakom 2. Razmatraće se potpuno reverzibilno opterećenje,  $R=-1$ . Prema datoj geometriji gornjeg dela šipke, VEP koeficijent posle prve iteracije je

correspond to the different states of dynamic equilibrium of the rod parts. The iterative procedure, which follows, is used to calculate the state of dynamic equilibrium for the upper part of the rod, which has undergone VEP deformation. The parameter defining the fluctuating states of dynamic equilibrium is the equivalent stiffness  $k_{eq}=k/(1+j_{vp})$ , which means the VP creep coefficient must be calculated for the targeted condition of dynamic equilibrium in the upper part of the rod. This coefficient can be calculated by using the formula given by the first author, [7]

where  $x_{eq}=x$  is the viscous damping coefficient, see Eq. (44).

The damping coefficient in the first iteration is  $x_{eq}=0.168168$ , allowing to calculate, in the following order:  $j_{vp1}$ ,  $k_{eq1}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $w_1^*$ ,  $w_2^*$ ,  $d_1^*$ ,  $d_2^*$ ,  $x_1$ , and  $x_2$ . The damping coefficient  $x_1$  obtained in the first iteration is used in the second iteration to calculate the new VP creep coefficient  $j_{vp}$  as well as the stiffness coefficient  $k_{eq}$ , and this procedure is repeated until the discrepancy between the damping coefficients obtained in two consecutive iterations is negligibly small. In this section, a procedure based on a global convergence check will be described. In particular, it may be assumed that steady state conditions have been achieved if

where  $e$  denotes the total number of elements (parts) of the rod and  $||$  denotes the absolute value. The multiplication factor of 100 on the left-hand side allows the specified tolerance factor  $e'$  to be considered as a percentage term. The convergence criterion given by Eq. (69) states that steady state conditions are deemed to have been achieved if the sum of the absolute values of the viscous damping coefficient increment for any step ( $n$ ) is less than or equal to  $e'$  times the corresponding value for the first step. For practical purposes a value of  $e' \leq 1.0$  (i.e. 1%) is generally adequate.

Obtained input dynamic parameters in the dynamic modal analysis correspond to different states of dynamic equilibrium of the rod parts.

## 5.2 Rod with constant cross section

We will begin the application of the previously described procedure for calculation of dynamic parameters of rods, which have undergone different deformations in the structure, on rods with constant cross sections. The input data for the first iteration are given in Tab. 6 and they refer to the TDOF system designated 2. The fully reversed loading,  $R=-1$ , will be considered. According to the given geometry of the upper part of the rod, the VEP coefficient after first iteration is

$$j_{vp,1/2} = \pm \sqrt{8 \cdot 0.25^2 \cdot 0.168168 \frac{4}{0.019^2 \cdot p \cdot 4} - 1} - 1 = \pm 8.552 - 1 \Rightarrow j_{vp,1} = 7.552,$$

$$k_{eq,1} = \frac{2k}{1+j_{vp}} = \frac{2k}{8.552},$$

$$I_1 = 192536981.1 \Rightarrow w_1^* = 13875.76957, \quad I_2 = 5022.76 \Rightarrow w_2^* = 70.8714,$$

$$d_1^* = \frac{w_F}{w_1^*} = \frac{94.25}{13875.77} = 0.006792, \quad d_2^* = \frac{w_F}{w_2^*} = \frac{94.25}{70.87} = 1.33$$

Prema jednačini (63) relativna viskozna prigušenja su:

According to Eq. (63) the viscous damping ratios are:

$$x_1 = \frac{j_1^* d_1 (1 - d_1^{*2})}{2d_1^* (1 + d_1^2 + j_1^*)} = 0.138214, \quad x_2 = \frac{j_2^* d_2 (1 - d_2^{*2})}{2d_2^* (1 + d_2^2 + j_2^*)} = -0.001421.$$

Dinamički koeficijenti su:

Dynamic coefficients are:

$$D_{vp1}^* = \sqrt{\frac{(1 + 7.552)^2 + 0.006792^2}{1 + 0.006792^2}} \frac{1}{1 + 7.552} = 0.999977,$$

$$D_2^* = \sqrt{\frac{(1 + 2)^2 + 1.33^2}{1 + 1.33^2}} \frac{1}{1 + 2} = 0.799278$$

Dinamički koeficijent dela 1 veoma je blizak jedinici. To znači da je relativna frekvencija (0.006792) premala da bi se dostigla čvrstoća na zamor ovog dela šipke. Međutim, pod istim brojem ciklusa i s relativnom frekvencijom 1.33 dela 2, uticaj odnosa masa na zamornu čvrstoću veoma je značajan, s dinamičkim koeficijentom 0.799278.

Ulazna vrednost relativnog viskoznog prigušenja gornjeg dela šipke u drugoj iteraciji jeste 0.138214. U tabeli 7. su prikazani svi parametri sračunati u tri iteracije. Može se primetiti da su tri iteracije bile dovoljne za sračunavanje dinamičkih parametara šipke predstavljene kao dinamički DSS sistem, čiji delovi trpe različite deformacije. Zato su ovi parametri merodavni za dalju modalnu analizu, koja sada odgovara uobičajenom postupku linearne dinamičke analize.

Dynamic coefficient of part 1 is very close to 1. This means that relative frequency of 0.006792 is too small to achieve the fatigue strength for this part of the rod. However, under the same number of cycles and with relative frequency of 1.33 in part 2, the influence of mass ratio on fatigue strength is very significant, with dynamic coefficient of 0.799278.

The input value of the viscoplastic coefficient of viscosity of the upper part of the rod in the second iteration is 0.138214. Table 7 shows all the parameters calculated in the three completed iterations and it is seen that after only three iterations the input parameters were calculated for the dynamic TDOF system of a rod, which has undergone different deformations in its different parts. Thus, they are relevant for the further modal analysis, which now corresponds to the usual procedure devised in the linear dynamic analysis.

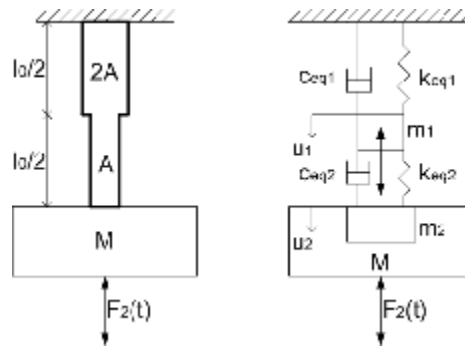
Tabela 7. Dinamički parametri po iteraciji za šipku konstantnog poprečnog preseka  
Table 7. Dynamic parameters per iterations for rod with constant cross sections

Iteracija Iteration	1	2	3
$\Phi_{vp1}$	7.552	6.742	6.794
$k_{eq1}$	2k/8.552	2k/7.742	2k/7.794
$\lambda_1$	192536981.10	197767519.20	197399073.40
$\lambda_2$	5022.76	5401.19	5375.90
$\omega_1^*$	13875.77	14062.98	14049.88
$\omega_2^*$	70.87	73.49	73.32
$\delta_1^*$	0.006792	0.006702	0.006708
$\delta_2^*$	1.330000	1.280000	1.285450
$\xi_1$	0.138214	0.140070	0.139940
$\xi_2$	-0.001421	-0.001226	-0.001247
$D_{vp1}$	0.999977	0.999978	0.999978
$D_2$	0.799278	0.669340	0.668012

Ciljano stanje dinamičke ravnoteže gornje polovine šipke, s relativnim prigušenjem 0.13994 dostignuto je nakon samo tri iteracije, dok se odgovarajuće stanje dinamičke ravnoteže donje polovine postiže pri relativnom prigušenju -0.001247. Negativna vrednost relativnog prigušenja donje polovine šipke znači da će se amplituda oscilovanja donje polovine šipke, pri zadatoj spoljnoj kružnoj frekvenciji od 94.25rad/s, kontinuirano povećavati, jer se trenutne (prolazne) vibracije neće smiriti, zahvaljujući množiocu  $e^{\xi\omega t}$ . Iz aspekta analize šipke, dobijeni rezultati vibracija DSS modela su nepovoljni. Glavni razlog za to je pretpostavljeni konstantan poprečni presek štapa.

### 5.3 Štap sa skokovito promenljivim poprečnim presekom

Radi iznalaženja odgovarajućeg podužnog preseka DSS modela šipke, koji će proizvesti ciljane rezultate oscilacija pod spoljašnjom pobudom zadate frekvencije, analizirana je šipka skokovito promenljivog poprečnog preseka, kao na sl. 14.



Slika 14. DSS čelična šipka skokovito promenljivog poprečnog preseka s jednom koncentrisanom masom  
Figure 14. TDOF step cross section steel rod with one lumped element of mass

Viskoelastični RDA DSS sistem:  $m_1=m$ ,  $m_2=m/2$ ,  $m_{eq2}=m/2+M$ ,  $k_1=4k$ ,  $k_2=2k$ ,  $j_1=j_2=j$ , prikazan na sl. 14, opterećen je cikličnim sinusoidalnim opterećenjem simetričnog ciklusa:  $f_{F2}=15\text{Hz}$  i  $w_{F2}=94.25\text{rad/s}$ .

Karakteristična vremena  $T_{K,1}^D$  i  $T_{K,2}^D$  mogu se odrediti iz

$$I_{1/2} = \frac{6k}{2m} + \frac{2k}{m} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{6k}{m} + \frac{2k}{m} \right)^2 - \frac{8k^2}{m^2}} = (5 \pm 3) \frac{k}{m}$$

$$T_{K,1/2}^D = \sqrt{\frac{1}{I_{1/2}}} = \sqrt{\frac{1}{(5 \pm 3)}} T_K^D, \quad T_{K,1}^D = 0.353553 T_K^D, \quad T_{K,2}^D = 0.707107 T_K^D.$$

Odatle je:

$$d_1 = T_{K,1}^D w_F = 0.00322227, \quad d_2 = T_{K,2}^D w_F = 0.00644455.$$

Prirodne frekvencije su:

$$I_1 = 213794597.6 \Rightarrow w_1^* = 14621.71664, \quad I_2 = 12894.43 \Rightarrow w_2^* = 113.5536.$$

Odatle sledi da je

The targeted state of dynamic equilibrium of the upper half of the rod with the damping coefficient of 0.13994 was obtained after only three iterations, and the corresponding state of dynamic equilibrium of the lower half of the rod has the damping coefficient of -0.001247. The negative damping coefficient of the lower half of the rod means that if the given external circular frequency is 94.25rad/s, the lower half of the rod will continuously increase its oscillation amplitude because the transient vibrations will not subside due to member  $e^{\xi\omega t}$  as the multiplier. From the aspect of analysing the rod, the obtained vibration results for the TDOF model is unfavourable. The main reason for this is the presupposed constant cross section along the length of the rod.

### 5.3 Rod with step cross sections

In order to find a longitudinally-shaped model of TDOF rod, which would produce the targeted oscillation results for the given external frequency, the step cross section rod is analysed, as shown in Fig. 14.

The TDOF viscoelastic RDA system:  $m_1=m$ ,  $m_2=m/2$ ,  $m_{eq2}=m/2+M$ ,  $k_1=4k$ ,  $k_2=2k$ ,  $j_1=j_2=j$ , which is shown in Fig. 14, is loaded with cyclic sinusoidal loads in a symmetrical cycle:  $f_{F2}=15\text{Hz}$  and  $w_{F2}=94.25\text{rad/s}$ .

The characteristic times  $T_{K,1}^D$  and  $T_{K,2}^D$  may be obtained as follows

Thus

The natural frequencies are:

Thus



$$d_1^* = \frac{w_F}{w_1^*} = \frac{94.25}{14621.71664} = 0.0064459, \quad d_2^* = \frac{w_F}{w_2^*} = \frac{94.25}{113.5536} = 0.83.$$

Prema jednačini (63) relativna viskozna prigušenja su:

According to Eq. (63) the viscous damping ratios are:

$$x_1 = \frac{j_1^* d_1 (1 - d_1^{*2})}{2d_1^* (1 + d_1^2 + j_1^*)} = 0.16662, \quad x_2 = \frac{j_2^* d_2 (1 - d_2^{*2})}{2d_2^* (1 + d_2^2 + j_2^*)} = 0.000805.$$

Dinamički koeficijenti su:

Dynamic coefficients are:

$$D_1^* = \sqrt{\frac{(1+2)^2 + 0.006446^2}{1+0.006446^2}} \frac{1}{1+2} = 0.999982, \quad D_2^* = \sqrt{\frac{(1+2)^2 + 0.83^2}{1+0.83^2}} \frac{1}{1+2} = 0.798388$$

Ponovo, dinamički koeficijent dela 1 šipke vrlo je blizak jedinici, dok je pod istim brojem ciklusa u delu 2 uticaj odnosa masa na zamornu čvrstoću značajan, s dinamičkim koeficijentom 0.798388.

Again, the dynamic coefficient of part 1 of the rod is very close to 1, while under the same number of cycles in part 2, the influence of mass ratio on fatigue strength is significant, with dynamic coefficient of 0.798388.

Dobijene vrednosti relativnog prigušenja pokazuju da se gornji, prošireni deo šipke nalazi u viskoplastičnom stanju, pa je potrebno primeniti iterativni postupak za iznalaženje odgovarajućih stanja dinamičke ravnoteže delova šipke. VEP koeficijent tečenja, određen u prvoj iteraciji za gornji, prošireni deo šipke, čija je površina poprečnog preseka dvostruko veća, jeste

The obtained damping ratios show that expanded upper part of the rod is viscoplastic and the iterative procedure should be used to find the corresponding states of dynamic equilibrium for the rod parts. The VEP ratio obtained in the first iteration for the expanded upper part of the rod, whose surface is twice as big, is now

$$j_{vp,1/2} = \pm \sqrt{8 \cdot 0.25^2 \cdot 0.16662 \frac{4}{2 \cdot 0.019^2 \cdot p \cdot 4}} - 1 - 1 = \pm 5.977 - 1 \Rightarrow j_{vp,1} = 4.977,$$

$$k_{eq1} = \frac{4k}{1+j_{vp}} = \frac{4k}{5.977}, \quad k_{eq2} = \frac{2k}{1+j^*} = \frac{2k}{3},$$

$$I_1 = 142804762.7 \Rightarrow w_1^* = 11950.09, \quad I_2 = 9689.437 \Rightarrow w_2^* = 98.4349,$$

Sada je

Thus

$$d_1^* = \frac{w_F}{w_1^*} = \frac{94.25}{11950.09467} = 0.007887, \quad d_2^* = \frac{w_F}{w_2^*} = \frac{94.25}{98.4349} = 0.957485,$$

Prema jednačini (63) relativna viskozna prigušenja su:

According to Eq. (63) the viscous damping ratios are:

$$x_1 = \frac{j_1^* d_1 (1 - d_1^{*2})}{2d_1^* (1 + d_1^2 + j_1^*)} = 0.13618, \quad x_2 = \frac{j_2^* d_2 (1 - d_2^{*2})}{2d_2^* (1 + d_2^2 + j_2^*)} = 0.000187.$$

Dinamički koeficijenti su:

Dynamic coefficients are:

$$D_{vp1}^* = \sqrt{\frac{(1+4.977)^2 + 0.007887^2}{1+0.007887^2}} \frac{1}{1+4.977} = 0.999970, \quad D_2^* = \sqrt{\frac{(1+2)^2 + 0.957485^2}{1+0.957485^2}} \frac{1}{1+2} = 0.758190$$

Ciljano stanje dinamičke ravnoteže gornjeg dela šipke, čije je relativno prigušenje sada 0.13936, postignuto je nakon samo tri iteracije (videti tab. 8), dok je odgovarajuće stanje dinamičke ravnoteže donjeg dela šipke postignuto pri relativnom prigušenju 0.000281.

The targeted state of dynamic equilibrium of the upper part of the rod, whose damping coefficient is now 0.13936, is obtained after only three iterations (see Tab. 8), and the corresponding state of dynamic equilibrium of the lower part of the rod has the damping coefficient of 0.000281.

Pozitivno relativno prigušenje donjeg dela šipke znači da su, pri zadatoj spoljašnjoj pobudi kružne frekvencije 94.25rad/s, oscilacije ovog dela šipke stabilne. Iz aspekta analize šipke, dobijeni rezultati vibracija DSS modela su sada povoljni. Glavni razlog za to je pretpostavljeni skokovito promenljiv poprečni presek štapa. U tabeli 9. prikazani su parametri VEP šipke sa skokovito promenljivim poprečnim presekom,

The positive damping ratio of the lower part of the rod means that if the given external circular frequency is 94.25rad/s, the oscillations of the lower part of the rod are now stable. From the aspect of analysing the rod, the obtained vibration results for the TDOF model are now favourable, and the main reason for this is the presupposed step cross section of the rod. Table 9

merodavni za nastavak postupka modalne analize. Pre primene modalne analize, moraju se rešiti sledeće obične diferencijalne jednačine, razdvojene po tonovima:

shows the parameters of the VEP rod with a step cross section relevant for continuing the modal analysis procedure. These are the common differential equations separated according to modes which need to be solved prior to running the modal analysis:

$$m_1 \ddot{v}_1(t) + 3408.56 \dot{v}_1(t) + 12229.34^2 v_1(t) = N_1(t)$$

$$m_2 \ddot{v}_2(t) + 0.05655 \dot{v}_2(t) + 100.63^2 v_2(t) = N_2(t)$$

Tabela 8. Dinamički parametri po iteraciji za šipku sa skokovito promenljivim poprečnim presekom  
Table 8. Dynamic parameters per iterations for rod with step cross sections

Iteracija Iteration	1	2	3
$\Phi_{vp1}$	4.977	4.387	4.462
$k_{eq1}$	4k/5.977	4k/5.387	4k/5.462
$\lambda_1$	142804762.70	150645806.10	149556802.30
$\lambda_2$	9689.44	10191.82	10125.51
$\omega_1$	11950.09	12273.79	12229.34
$\omega_2$	98.43	100.95	100.63
$\delta_1$	0.007887	0.007679	0.007707
$\delta_2$	0.957485	0.933588	0.936640
$\xi_1$	0.136180	0.139870	0.139360
$\xi_2$	0.000187	0.000295	0.000281
$D_{vp1}$	0.999970	0.999972	0.999971
$D_2$	0.758190	0.765539	0.764595

Tabela 9. Parametri VEP šipke sa skokovito promenljivim poprečnim presekom  
Table 9. Parameters of the VEP rod with step cross sections

$l_0=0.5m, k=119.08 \times 10^6 N/m, k_{eq1}^{(3)}=4k/5.462, k_{eq2}=2k/3, m=1.114kg, M=4104kg$						
	$\omega$	$\delta$	$\xi$	$D_{vp}$	$C_{eq}$	
Deo 1	12229.34	0.007707	0.139360	0.999971	2747.16	
Deo 2	100.63	0.936640	0.000281	0.764595	320.81	

Lokalno oštećenje može se uvesti putem simulacije oštećenja, redukcijom krutosti određenog dela štapa. Stoga je ciljano redukcija krutosti dela 1, dobijena nakon tri iteracije, 5.462.

Oblici vibracija tonova definisani su odnosom amplituda:

Local stiffness-type damage may be introduced by simulating the damage as the reduction of stiffness for one specific rod part. Thus, targeted reduction of stiffness of part 1, which is obtained after three iterations, is 5.462.

The modal shapes of vibration are defined by the amplitude ratios:

$$\frac{F_{2(1)}}{F_{1(1)}} = \frac{k_{eq1} + k_{eq2} - m\omega_1^2}{k_{eq2}} = \frac{4k}{5.462} + \frac{2k}{3} - m \cdot 12229.34^2 = -0.000169'$$

$$\frac{F_{2(2)}}{F_{1(2)}} = \frac{k_{eq1} + k_{eq2} - m\omega_2^2}{k_{eq2}} = \frac{4k}{5.462} + \frac{2k}{3} - m \cdot 100.63^2 = 2.098357'$$

Odavde su svojstveni vektori,  $\Phi_{(t)}$

Thus the eigenvectors,  $\Phi_{(t)}$  are

$$\Phi = [\Phi_{(1)} \quad \Phi_{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.000169 & 2.098357 \end{bmatrix}$$

Pogodno je skalirati svojstvene vektore  $\Phi$  tako da zadovolje M- i K- ortogonalnost. Izaberimo vektore  $Z_{(i)}$ , tako da

It is convenient to scale the eigenvectors  $\Phi$  such that they satisfy the M- and K-orthogonality. Let us choose a normalizing vectors  $Z_{(i)}$ , such that

$$Z^T M Z = I$$

Tada je

Then

$$Z = \begin{bmatrix} 0.947403 & 0.007438 \\ -0.000160 & 0.015608 \end{bmatrix}$$

Vektor modalnog opterećenja je

The vector of modal loading is

$$N(t) = Z^T \hat{F} g(t) = \begin{bmatrix} 0.947403 & -0.000160 \\ 0.007438 & 0.015608 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 40261 \end{bmatrix} \sin(94.25t) = \begin{bmatrix} -6.44 \\ 628.39 \end{bmatrix} \sin(94.25t)$$

Jednačine su razdvojene, pa su amplitude odgovora u stabilnom stanju:

The equations are uncoupled so that the amplitudes of the steady state response are:

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \frac{N_1}{w_1^2} D_{eq1} = \frac{N_1}{w_1^2} \frac{1}{\sqrt{(1-d_1^{*2})^2 + (2x_1 d_1^*)^2}} = \\ &= \frac{-6.44}{12229.34^2} \frac{1}{\sqrt{(1-0.007707^2)^2 + (2 \cdot 0.13936 \cdot 0.007707)^2}} = \\ &= -0.000000043 \cdot 1.000057 = -0.000000043m \\ \hat{A}_2 &= \frac{N_2}{w_2^2} D_{eq2} = \frac{N_2}{w_2^2} \frac{1}{\sqrt{(1-d_2^{*2})^2 + (2x_2 d_2^*)^2}} = \\ &= \frac{628.39}{100.63^2} \frac{1}{\sqrt{(1-0.93664^2)^2 + (2 \cdot 0.000281 \cdot 0.93664)^2}} = \\ &= 0.062055 \cdot 8.149518 = 0.505718m \end{aligned}$$

Amplitude u prvobitnom koordinatnom sistemu su:

The amplitudes in terms of the original coordinate system are:

$$A = Z \hat{A} = \begin{bmatrix} 0.947403 & 0.007438 \\ -0.000160 & 0.015608 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.000000043 \\ 0.505718 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.003762 \\ 0.007893 \end{bmatrix}$$

Statička pomeranja su:

The static displacements are:

$$u_{s1} = \frac{A_1}{D_{eq1}} = \frac{0.003762}{1.000057} = 0.003761, u_{s2} = \frac{A_2}{D_{eq2}} = \frac{0.007893}{8.149518} = 0.000969$$

$$Du_{s2} = \frac{A_2 - A_1}{D_{eq2}} = \frac{0.007893 - 0.003762}{8.149518} = 0.000507$$

Odavde su amplitude homogenih vibracija delova 1 i 2 šipke nakon pojave zamora:

Thus homogeneous strain amplitudes of the rod part 1 and 2 after fatigue are:

$$e_1 = \frac{u_{s1}}{l_0 / 2} D_{vpt}^* = \frac{0.003761}{0.25} 0.999971 = 0.015045$$

$$e_2 = \frac{Du_{s2}}{l_0 / 2} D_2^* = \frac{0.000507}{0.25} 0.764595 = 0.00155$$

Ako je cela dilatacija  $e_1$  trajno ograničena, indeks duktilnog oštećenja dela 1 šipke ima sledeću maksimalnu vrednost

If the whole strain  $e_1$  is permanently restrained, ductility damage index of the rod part 1 has following maximum value

$$d_1 = \frac{e_1 - e_Y}{e_{ul} - e_Y} = \frac{0.015045 - 0.002029}{0.018257 - 0.002029} = 0.80$$

Dinamički koeficijent  $D_{vp1}^*$  dela 1 šipke vrlo je blizak jedinici, što znači da zamorna čvrstoća ovog dela nije dostignuta. Međutim, nosivost ovog dela može biti znatno pogoršana prisustvom VEP dilatacije, koja dovodi do lokalne koncentracije napona

Dynamic coefficient  $D_{vp1}^*$  of the rod part 1 is very close to one, which means that the fatigue strength of this part is not achieved. However, the strength of this part may be seriously aggravated by the presence of VEP strain led to the local stress concentration

$$s_{e1}(-1) = s_{max} \left\{ D_{vp1}^* \left[ 1 + (j_{vp} - j^*) \frac{s_Y}{s_{max}} \right] \right\} = 71 \left\{ 0.999971 \left[ 1 + (4.462 - 2) \frac{258}{71} \right] \right\} = 9.946134 \cdot 71 = 706.18 \text{ MPa}$$

Faktor lokalne koncentracije napona je 9.95.

Pod istim brojem ciklusa, deo 2 šipke nalazi se u stabilnom stanju VE vibracija, sa zamornom čvrstoćom, na koju značajno utiče odnos masa,

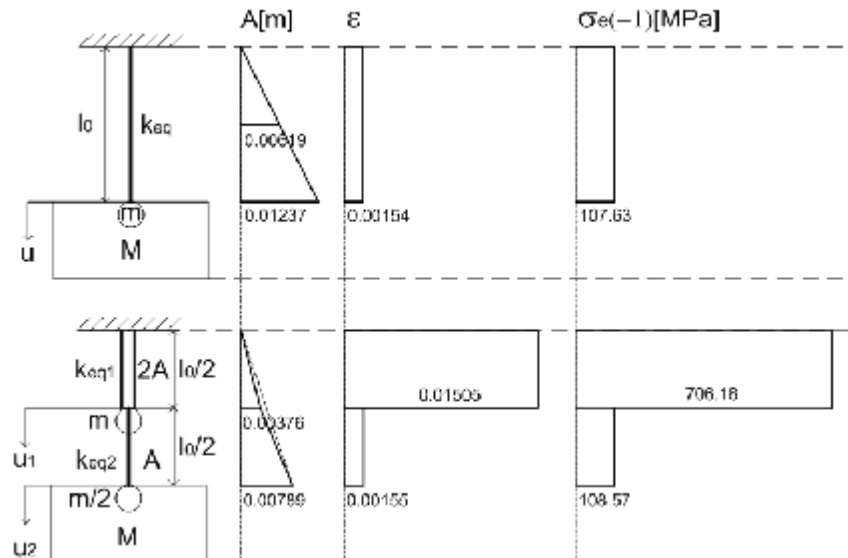
The local stress concentration factor is 9.95.

Under the same number of cycles, the rod part 2 is in the VE stage of steady state vibration with the fatigue strength influenced by the mass ratio

$$s_{e2}(-1) = s_{max} D_2^* = 142 \cdot 0.764595 = 108.57 \text{ MPa}$$

Rešenja za DSS šipku skokovito promenljivog poprečnog preseka prikazana su na sl. 15 i upoređena sa rešenjima dobijenim za jednostavan RDA sistem prikazan u odeljku 3.3.

The solutions of the TDOF rod with step cross sections are shown in Fig. 15 and compared with the solutions of the single RDA system presented in section 3.3.



Slika 15. Reološko-dinamički odgovor dva RDA sistema čelične šipke  
Figure 15. Rheological-dynamical response of two RDA systems of steel rod

Jednostavan RDA sistem ima sledeću amplitudu

The single RDA system has the following amplitude

$$A = \frac{F_A}{k_{eq}} \frac{1}{\sqrt{(1-d^{*2})^2 + (2xd^*)^2}} = \frac{40261}{\frac{119.08 \cdot 10^6}{3}} \frac{1}{\sqrt{(1-0.958141^2)^2 + (2 \cdot 0.00026 \cdot 0.958141)^2}} = 0.01237 \text{ m}$$

Ovaj sistem daje VE amplitudu koja je 12.2 puta (videti dinamički faktor uvećanja u odeljku 3.3.2) veća od statičkog pomeranja dobijenog korišćenjem RDA viskoelastičnog modela

This system gives the VE amplitude, which are 12.2 times (see dynamic magnification factor in section 3.3.2) greater than static displacement obtained using the RDA viscoelastic model

$$e_A = \frac{s_A}{E_H} \sqrt{\frac{(1+j^*)^2 + d^2}{1+d^2}} = \frac{142}{210000} \sqrt{\frac{(1+2)^2 + 0.009114^2}{1+0.009114^2}} = 0.002029$$

$$u_s = u(l_0) = e_A l_0 = 0.002029 \cdot 0.5 = 0.001014 m (0.01237 / 0.001014 = 12.2)$$

Odavde sledi

Thus, after fatigue yield

$$e = e_A \cdot D^* = 0.002029 \cdot 0.75799 = 0.001538,$$

$$s_e(-1) = s_{max} \cdot D^* = 142 \cdot 0.75799 = 107.63 MPa$$

Ovi rezultati su praktično identični rezultatima dobijenim za deo 2 šipke modelirane kao DSS sistem. Oni su potvrdili i sve vrednosti sračunate u modalnoj analizi.

These results are practically same as results of the part 2 of the rod modelled as a TDOF system and they confirmed all computational values in modal analysis.

## 6 ZAKLJUČAK

Prikazana je analiza karakterizacije oštećenja štapova usled zamora za vremenski zavisne deformacije materijala linijskih konstrukcija pod cikličnim aksijalnim opterećenjem skokovito promenljive amplitude napona. Algoritam otkrivanja oštećenja formulisani je na osnovu jednostavnog RDA sistema, koji je ranije izveden iz posebnih ograničenja modela kontinuuma korišćenjem principa analogije. Po uzoru na RDA model, uz određenu fizičku kalibraciju, modelirana je čelična šipka koja se godinama koristi kao prototip u istraživanjima.

RDA postupak modeliranja svodi materijalno nelinearne probleme na linearne dinamičke probleme, čime se omogućava upotreba modalne analize. Za prigušene konstrukcije najvažnije je određivanje matrice prigušenja ili relativnih prigušenja tonova. Stoga, ovaj rad predlaže modifikaciju koja se može jednostavno integrisati u postojeće algoritme modalne analize, a svodi se na postupak određivanja relativnog prigušenja pojedinih delova diskretizovane konstrukcije. Kao što je prikazano na primeru DSS sistema, način raspodele spoljašnjih masa (opterećenja) duž sistema, putem odnosa spoljašnje mase i mase pojedinih delova konstrukcije, koji se ponašaju kao amortizeri, direktno utiče na veličinu relativnih prigušenja tih delova, a indirektno i ostalih delova konstrukcije. Pre upotrebe iterativnog postupka za koordinaciju različitih stanja dinamičke ravnoteže diskretizovane konstrukcije, čiji su pojedini delovi pretrpeli različite VEP deformacije, neophodno je odrediti svojstvene vrednosti RDA modela. Prema principu analogije, svojstvene vrednosti određuju se za neopterećenu diskretizovanu konstrukciju, što odgovara svojstvenim vrednostima konstrukcije u stanju kritičnog prigušenja.

Na osnovu izraza za dva tipa prigušenja, razvijen je jedan posebno atraktivan postupak za projektovanje VEP štapova (amortizera). Koeficijent histerezisnog prigušenja je funkcija geometrijskih karakteristika prigušivača, VP koeficijenta tečenja i oblika cikličnih varijacija. Nijedan od ovih faktora, koji utiču na amortizere, nije uključen u empirijske predloge. Pod istom relativnom frekvencijom  $d$ , ključan je uticaj odnosa masa  $h$  na dinamički koeficijent, zamornu čvrstoću i amplitudu totalne dilatacije. Postupak projektovanja bazira se na globalnoj proverbi konvergencije relativnih prigušenja tonova. Od mnogih dostupnih pokazatelja oštećenja, u ovom radu analiziran je samo indeks duktilnog oštećenja.

## 6 CONCLUSION

A study of fatigue damage characterization for time-dependent deformations of material of rod structures under step cyclic constant amplitudes loading is here presented. The damage detection algorithm was formulated from a single RDA system, which has already been derived from special limits of the continuum model using the principle of analogy. A steel rod has been modelled according to the RDA model, with some physical calibration and used as a prototype in the research for years.

The RDA modelling technique reduces material nonlinear problems to linear dynamic problems, which allows the possibility of using the modal analysis. For damped structures, the determination of damping matrix or modal damping coefficient is most important. Therefore, this paper proposes a modification which can be simply integrated in the extant modal analysis algorithms and refers to the procedure of calculating damping coefficients for the various parts of a discretised structure. As demonstrated in the case of TDOF systems, the distribution of external load masses applied to a structure by means of the ratio between the load masses and the mass of those parts acting as dampers, affects directly the damping ratio of those parts, and indirectly the other parts of the structure. Before using the iterative procedure to coordinate the different states of dynamic equilibrium in a discretised structure, which has undergone different VEP deformations in its different parts, it is necessary to obtain the eigenvalues of the RDA model. According to the principle of analogy, the eigenvalues are calculated for a discretised structure relieved of external loads, which represent the eigenvalues for the structure in the condition of critical damping.

Based on the formulas of the two type of damping, an especially attractive procedure for the design of the VEP rods (dampers) is derived. The hysteretic damping coefficient is a function of the damper geometry, the VP creep coefficient and the shape of the cyclic variation. None of these factors, which affect dampers, are included in empirical proposal. Under the same relative frequency  $d$ , the influence of mass ratio  $h$  on dynamic coefficient, fatigue strength and total strain amplitude is crucial. A procedure of design is based on a global check of convergence of modal damping ratios. Among the many damage indicators available, only the ductility damage index is analyzed here.

## 7 LITERATURA REFERENCES

- [1] Bažant, Z.P. and Kim, J.-K.: Improved prediction model for time-dependent deformations of concrete: Part 5-Cyclic load and cyclic humidity, *Materials and Structures* 25, 1992, 163-169.
- [2] Cosenza, E., Manfredi, G., Ramasco, R.: The Use of Damage Functionals in Earthquake Engineering: A Comparison between Different Methods, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 22(10), 1993, 855-868.
- [3] Macha, E.: A review of energy-based multiaxial fatigue failure criteria, *The Archive of Mechanical Engineering*, XLVIII(1), 2002, 71-101.
- [4] Macha, E., Sonsino, C.M.: Energy criteria of multiaxial fatigue failure, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 22, 1999, 1053-1070.
- [5] Milašinović, D.D.: Rheological-dynamical analogy: modeling of fatigue behavior, *International Journal of Solids and Structures* 40(1), 2003, 181-217.
- [6] Milašinović, D.D.: Rheological-dynamical analogy: prediction of buckling curves of columns, *International Journal of Solids and Structures* 37(29), 2000, 3965-4004.
- [7] Milašinović, D. D.: Rheological-dynamical analogy: Prediction of damping parameters of hysteresis damper, *International Journal of Solids and Structures* 44(22-23), 2007, 7143-7166.
- [8] Milašinović, D.D.: Rheological-dynamical analogy: viscoelastoplastic behavior of metallic bars, *International Journal of Solids and Structures* 41(16-17), 2004, 4599-4634.
- [9] Preumont, A., Piéfort, V.: Predicting random high cycle fatigue life with finite elements, *Journal of Vibration and Acoustics*, 116, 1994, 245-248.
- [10] Williams, J.E.: *Modern Physics*, Holt, Rinehart, and Winston, Inc., New York, 1968

## REZIME

### REOLOŠKO-DINAMIČKI MODEL OŠTEĆENJA USLED ZAMORA ZA ŠTAPOVE S VREMENSKI ZAVISNIM PONAŠANJEM

*Dragan D. MILAŠINOVIĆ*  
*Danica GOLEŠ*

U ovom radu se prikazuje i razmatra novi reološko-dinamički model oštećenja usled zamora štapova izloženih skokovitim stabilnim periodima cikličnog opterećenja konstantne amplitude i frekvencije napona. Temeljni princip, korišćen u ovom istraživanju, pri posmatranju vremenski zavisnog ponašanja štapova, jeste to da su posledice postojanja oštećenja promene svojstava konstrukcije, kao što su masa, prigušenje i krutost. Formulacija se pojednostavljuje zahvaljujući činjenici da masa većine konstruktivnih štapova ostaje nepromenjena. Oštećenje usled zamora, definisano i kvantifikovano u ovom radu, zasniva se na nekoliko pokazatelja oštećenja, kao što su: koeficijent tečenja, indeks duktilnog oštećenja, granica izdržljivosti, dinamički koeficijent i relativno prigušenje tona. Ovaj algoritam je zapravo tačan postupak rešavanja svojstvenih vrednosti u stanju kritičnog prigušenja, što znači da ova teorija ne unosi nikakve dodatne greške u predviđanje prigušenja štapova. Detaljno je prikazano kako sukcesivna primena postupka na sistem s jednom koncentrisanom masom ili više njih može dovesti do mehanizma interakcije između dinamičkih koeficijenata i granice izdržljivosti. Reološko-dinamička teorija dovodi do sistema običnih diferencijalnih jednačina razdvojenih po tonovima, koje treba rešiti pre sprovođenja modalne analize.

**Ključne reči:** Indeks duktilnog oštećenja; dinamički koeficijent; granica izdržljivosti; relativno prigušenje tona; provera globalne konvergencije; modalna analiza

## SUMMARY

### RHEOLOGICAL-DYNAMICAL FATIGUE DAMAGE MODEL FOR TIME-DEPENDENT BEHAVIOR OF RODS

*Dragan D. MILAŠINOVIĆ*  
*Danica GOLEŠ*

This paper presents and discusses a new fatigue damage rheological-dynamical model of rods under step steady state periods of constant amplitude and frequency cyclic loading. The fundamental principle for time-dependent behavior of rods in this study is that the existence of damage results in the changes in structural properties, such as mass, damping and stiffness. Formulation becomes simpler since the mass of most engineering structural rods remains constant. Fatigue damage, which is defined and quantified in this paper, is based on several damage indices like: creep coefficient, ductility damage index, endurance limit, dynamic coefficient and modal damping ratio. This algorithm is actually an exact technique for solving the eigenvalues in the state of critical damping, which means that this theory itself did not introduce any additional errors to predict the damping of rods. It is more specifically detailed how the successive applications of one or more lumped element of masses can lead to interaction mechanisms between dynamic coefficients and endurance limits. The rheological-dynamical theory leads to a set of common differential equations separated according to modes which need to be solved prior to running the modal analysis.

**Keywords:** Ductility damage index; dynamic coefficient; endurance limit; modal damping ratio; global convergence check; modal analysis

# LUČNA BRANA “SV. PETKA” U REPUBLICI MAKEDONIJI ARCH DAM “SV. PETKA” IN R. MACEDONIA

Vladimir SIMONCE

ORIGINALNI NAUČNI RAD  
ORIGINAL SCIENTIFIC PAPER  
UDK: 627.825(497.7)= 861

## 1 UVOD

Brana „Sv. Petka” nalazi se u kanjonskom delu reke Treska, otprilike 5,9 km uzvodno od postojeće brane „Matka” i 10,5 km nizvodno od HEPS „Kozjak”. Od Skoplja je vazdušnom linijom udaljena oko 30 km.

Oblik rečne doline koju brana pregrađuje otprilike je simetričan, sa strmim obalama; maksimalni nagib na levoj obali iznosi oko  $60^{\circ}$ , a na desnoj  $50^{\circ}$ . Širina rečnog korita iznosi oko 20 m.

U litološkom smislu, područje lokaliteta brane sastoji se od prekambrijskih i *Riphey-kambrijskih* metamornih stena.

Tlo s leve strane od osovine brane sastoji se od *Riphey-kambrijskog* belog, sivo-belog i sivog mermera, ugljenog šriljca i mešavine ugljeno-muskovitnog i feldspatno-muskovitnog šriljca. Tlo s desne obale sastoji se od prekambrijskog mermera s niskim procentom liskuna. Rečni kanal ispunjen je aluvijalnim nanosom peska i šljunka različite krupnoće i sloja debljine 10–16 m. U pogledu tektonske regionalizacije oblasti, u strukturama prvog reda izdvajaju se podblokovi – strukture drugog reda – po četiri i s leve i sa desne strane.

U inženjersko-geološkom pogledu, teren se sastoji od rastresitih stena (aluvijalnih i diluvijalnih sedimenata) i čvrsto povezanih petrifikovanih stena (mermer, ugljeni škriljac, ugljeno-muskovitni i feldspatni škriljac).

---

Prof. dr Vladimir Simonce,  
glavni i odgovorni projektant tela brane  
Dame Gruev 3/3-20, Skoplje, R.M.  
E-mail: [vsimonce@yahoo.com](mailto:vsimonce@yahoo.com)

## 1 INTRODUCTION

The dam “Sv. Petka” is located in canyon part of river Treska, approximately 5.9 km upstream from existing dam “Matka”, as well as around 10.5 km downstream from HEPS “Kozjak” on r. Treska. In an airline, that is distance of around 30 km from Skopje.

River valley which is blocked by the dam has approximately symmetrical form, with steep strands whose maximal slopes on the left bank are around  $60^{\circ}$  and on the right around  $50^{\circ}$ . Width of the river channel is approximately 20.0 m.

The area of dam location, from lithological aspect is constructed of Precambrian and Riphey-cambrian metamorphic rocks.

Left side from the axis of the dam is built from Riphey-cambrian massive white, gray-white and gray marbles, carbonic schist and complex of carbonic-muscovite schist and feldspathized-muscovite schist. Right bank is built of Precambrian marbles with low presence of mica and low expressive schistosity-foliation. The river channel is filled with alluvial drift of diverse graded sands and gravels with thickness of 10 – 16 m. From aspect of tectonic regionalization of the area, in the structures of first order, separated are sub-blocks - structures of second order, of which four on the left side and four on the right side.

From engineer-geological aspect the terrain is constructed of unbounded rocks in which group belongs alluvial and diluvia sediments and firmly bounded petrified rocks in which group belong marbles, carbonic schist, carbon-muscovite and feldspathized schists.

---

Prof. Dr. Vladimir Simonce  
Principal Designer Body of the Dam  
Dame Gruev 3/3-20, Skopje, R.M.  
E-mail: [vsimonce@yahoo.com](mailto:vsimonce@yahoo.com)

S ciljem projektovanja, formirano je nekoliko inženjersko-geoloških modela (IGM), s različitim parametrima, kao što su prslina (RQD), kvalitet stenovite mase (RMR), brzina širenja elastičnih talasa, deformabilnost i smičuća čvrstoća stenovite mase. U nivou temelja brane, najčešće su zone čija brzina iznosi oko 4500–5000 m/s, što je prema ustanovljenim korelacijama analogno mediju čiji modul deformacije iznosi  $E_d = 8500\text{--}12000$  MPa.

Izvedena integralna inženjersko-geološka analiza, kao skup svih ispitivanja i procena profila brane, pokazuje da između kompozicije terena i usvojenih parametara postoji dobar sklad.

## 2 GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE BRANE

Lučna brana „Sv. Petka“ je dvostruko zakrivljena brana – i horizontalno i vertikalno. Geometrija brane definisana je geometrijom lukova i centralne konzole. Horizontalne sekcije (lukovi) konstruisani su od pet centara i sastoje se od tri dela: jednog unutrašnjeg (centralnog) dela konstantne debljine i dva spoljna dela (levog i desnog) promenljive debljine, koja se blago širi prema petama lukova. Uzvodna i nizvodna strana imaju različite centre i radijuse zakrivljenja. Vertikalne sekcije (konzole) promenljive su debljine, a nizvodna i uzvodna strana centralne konzole izvedena je kružnim linijama.

Kruna brane nalazi se na 364 m nadmorske visine, dok se najniža tačka, na dnu brane, nalazi na 300 m – dakle, visina iznosi 64 m. Debljina brane u kruni centralne konzole iznosi 2 m i na toj koti je konstantna, dok na koti od 300 m nadmorske visine iznosi 10 m. Struktura brane razdvojena je radijalnim spojnica, za koje je izvedena kompletna matematička definicija.

Količina ugrađenog betona iznosi  $27362\text{ m}^3$ . Preliv je šahtni.

Na slikama 1 i 2 prikazani su razvijeni podužni profil i definicija centralne konzole.

For the design, more engineer-geological models (IGM) by different parameters are formed, such as cracks (RQD), quality of the rocky mass (RMR), speed of stretching of the elastic waves, deformability and shearing strength of the rocky mass. The zones with velocities of approximately 4500 – 5000 m/sec are mostly represented at the level of foundation of the dam which is analogue to the medium with module of deformations  $E_d = 8500 - 12000$  MPa by the established correlations.

Constructed Integral engineer-geological section as collective of all investigations and assessments of the profile of the dam shows that generally good agreement between the composition and assembly of the terrain with the necessary parameters exists.

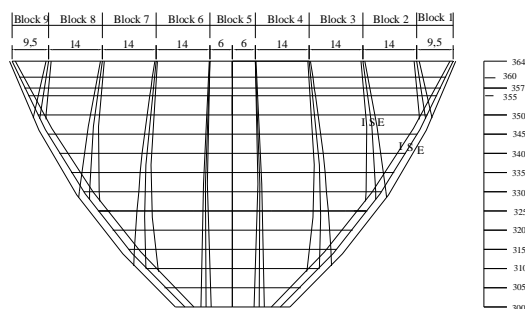
## 2 GEOMETRY OF THE DAM

Arch dam “Sv. Petka” is with double curvature, curved in horizontal and vertical direction. Geometry of the dam is defined with the geometry of the arches and the central cantilever. Horizontal sections – arches are constructed of 3 centres and consist of three parts: interior (central) – with constant thickness and two exterior, left and right, which are with variable thickness that mildly widen toward the heels of the arches. The upstream and downstream face has different centres and radius of the curvature. Vertical sections – cantilevers are with variable thickness and the upstream and downstream face of the central cantilever is constructed by circular lines.

Elevation of the crown of the dam is at 364.0 m.a.s.l., lowest elevation at the bottom is 300.0 m.a.s.l., so the construction height measures 64.0 m. Dam thickness at the crown of the central cantilever is 2.0 m and it is constant at this elevation; it is 10.0 m at elevation of 300 m.a.s.l.. The body of the dam is separated with radial contraction joints, for which complete mathematical definition is conducted.

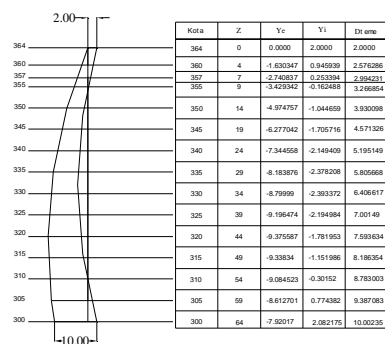
The embedded concrete volume, measures  $27362\text{ m}^3$ . A morning glory spillway is associated with the arch dam.

Developed longitudinal profile and definition of the central cantilever are given on Figures 1 and 2.



Slika 1. Razvijeni profil ekstradosa, centralne površine i intradosa brane  
Fig.1. Developed profile following the sections at Extrados, middle and intrados of the dam





Slika 2. Definicija glavnog poprečnog preseka brane  
Fig. 2. Definition of main cross-section of the dam

### 3 PARAMETRI PRORAČUNA

U proračunu su korišćeni sledeći parametri:

- Specifična težina vode  $g_{\text{voda}} = 10 \text{ kN/m}^3$
- Specifična težina betona  $g_{\text{beton}} = 24 \text{ kN/m}^3$
- Modul elastičnosti betona za statičko opterećenje

$$E_{\text{beton}} = 31,5 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

- Modul deformacije betona za statičko opterećenje

$$E_{\text{beton}} = 22 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

- Modul deformacije betona za dinamičko opterećenje  $E_{\text{beton}} = 28,6 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$

- Modul deformacije stene za statičko opterećenje:

u izveštaju o ispitivanju, moduli statičke deformacije definisani su u šest pseudohomogenih zona, koje se kreću u sledećim granicama: 1000–2200; 2200–3800; 3800–6500; 6500–8500; 8500–12000; 12000–18000 MPa.

Modul deformacije stene u matematičkom modelu dobijen je na osnovu toga gde se ona nalazi u geološkom profilu.

- Modul deformacije stene na dinamičko opterećenje povećan je za 30%.

– Poisson-ov koeficijent za beton iznosi  $\nu_c = 0,2$  za stenu  $\nu_r = 0,24$ , gravitaciono ubrzanje iznosi  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , dok je koeficijent termičke ekspanzije betona  $\alpha_t = 9,0 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}$ .

– Propisana je marka betona MB30, pritisne čvrstoće  $f_c = 30000 \text{ kN/m}^2$  i zatezne čvrstoće  $f_t = f_c/10 = 3000 \text{ kN/m}^2$ .

### 4 OPTEREĆENJA

Težina brane primenjena je u dva modela: na nezavisnim konzolama bez lučnog dejstva – to jest simulirajući proces građenja i na monolitnu lučno-gravitacionu konstrukciju nakon injektiranja spojnica.

Analize na hidrostatički pritisak urađene su za dva nivoa akumulacije: 357,30 m nadmorske visine (normalni nivo vode) i 364 m nadmorske visine, kada visina vode dostigne nivo krune. Nivo vode u visini krune predstavlja hipotetički slučaj (brana nije prelivna) i često se koristi u analizi betonskih brana.

### 3 PARAMETERS IN THE CALCULATION

In calculations are used:

- Specific weight for water  $g_{\text{water}} = 10.0 \text{ kN/m}^3$
- Specific weight for concrete  $g_{\text{conc}} = 24.0 \text{ kN/m}^3$
- Modulus of elasticity of concrete for static loading

$$E_{\text{conc}} = 31.5 \text{ Z}10^6 \text{ kN/m}^2$$

- Modulus of deformation of concrete for static loading  $E_{\text{conc}} = 22.0 \text{ Z}10^6 \text{ kN/m}^2$

- Modulus of deformation of concrete for dynamic loading  $E_{\text{conc}} = 28.6 \text{ Z}10^6 \text{ kN/m}^2$

- Modulus of deformation of the rock for static loading:

in the Investigation report, static modules of deformations are defined in six pseudo-homogenous zones. They are in the limits of: 1000 - 2200 Mpa; 2200 - 3800; 3800 - 6500; 6500 - 8500; 8500 - 12000; 12000 - 18000 Mpa.

Module of deformations in the mathematical model of the rock is acquired depending from its own location in geological profile.

- Module of deformations of the rock for dynamic loadings is enlarged for 30%.

– Poisson's ratio for concrete is  $\nu_c = 0.2$ , for rock  $\nu_r = 0.24$ , acceleration of gravity  $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$  and coefficient of thermal expansion of concrete  $\alpha_t = 9.0 \text{ Z}10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}$ .

– It is prescribed class of concrete MB30 with compressive strength  $f_c = 30000 \text{ kN/m}^2$  and tensile strength  $f_t = f_c/10 = 3000 \text{ kN/m}^2$ .

### 4 LOADS

Self-weight is applied in two design models: independent cantilevers with absence of arch action – that is simulating process of constructing and monolithic arch-gravity structure in the phase after joint grouting.

Analyzes are conducted for two elevation of the reservoir: elevation 357.30 m.a.s.l. (normal level), and elevation 364.00 m.a.s.l. water at level of the crown of dam. Water elevation at the level of the dam crown (364 m.a.s.l.) is hypothetical case (the dam is non-overflowing) and it has common use in the analysis of concrete dams.

Temperaturna opterećenja kod lučnih brana proizlaze iz razlike u temperaturi pri kojoj se spojnice injektiraju, to jest struktura brane monolitizuje, kao i zbog temperature betona tokom eksploatacije objekta.

Distribucija temperature po debljini brane prvenstveno zavisi od debljine. Kod tankih lučnih brana, kao što je brana „Sv. Petka”, realno je pretpostaviti da postoji linearna distribucija temperature od uzvodne strane ka nizvodnoj strani. Linearnu distribuciju temperature moguće je dobiti uprošćenom metodom [1] ili pomoću metode konačnih elemenata (FEM). Za ovaj tip brane zadovoljavajući pristup predstavlja uprošćena metoda, koja se često koristi i kod debelih brana. Temperaturna analiza ovom metodom opisana je u [1] i kao takva korišćena je i u slučaju ove brane. Prilikom korišćenja ove metode, neophodno je odrediti temperaturu sredine, temperaturu vode u akumulaciji, kao i efekte sunčevog zračenja.

Za određivanje temperature vazduha potrebno je proceniti cikluse prosečne temperature na dnevnom i godišnjem nivou.

Osim ova dva temperaturna ciklusa, koristi se i još jedan – treći. On se odnosi na maksimalne i minimalne temperature vazduha na lokalitetu i traje 15 dana. U proračunima čiji je cilj određivanje temperature betona, ti ciklusi prikazani su u obliku sinusoidnih talasa. Za određivanje temperaturnih opterećenja potrebni su sledeći podaci:

- (a) srednje mesečne temperature (maksimalna, minimalna i prosečna);
- (b) srednje godišnje temperature;
- (c) najviša zabeležena temperatura;
- (d) najniža zabeležena temperatura.

Radi određivanja temperaturnih ciklusa brane „Sv. Petka”, analizirani su meteorološki podaci iz tri najbliže hidrometeorološke stanice: „Makedonski Brod”, „Skopje-Petrovec” i „Tetovo”. Obradeni su podaci za period od trideset godina (1960–1990).

Za analizu brane „Sv. Petka” korišćene su temperature vode u postojećoj akumulaciji „Matka” (između 1971. i 1988), koja se nalazi 5,9 km nizvodno i dobijen je dijapazon ekstremnih temperaturnih vrednosti u letnjim i zimskim uslovima, uz male korekcije letnje temperature u gornjim slojevima vode u akumulaciji.

Zbog nepostojanja izmerenih podataka o sunčevom zračenju, usvojeni su podaci iz literature, prema kojima sunčevo zračenje povećava temperaturu betona za od 0,5 do 1 °C.

U skladu s metodom koja je predložena u [1,2,3], te metodologije koju je Biro za reklamacije opisao u [4], izvršeni su neophodni proračuni za određivanje temperature betona za tri karakteristična ciklusa u tri navedene meteorološke stanice. U proračunima koji su opisani u daljem tekstu korišćeni su rezultati dobijeni iz meteorološke stanice „Makedonski Brod”, uzimajući u obzir i gradijente koji postoje između uzvodne i nizvodne strane brane.

Sa Instituta za zemjotresno inženjerstvo i inženjersku seizmologiju Univerziteta Sveti Kiril i Metodij iz Skoplja dobijeni su specifični seizmički parametri za projektovanje brane „Sv. Petka”. Projektna ubrzanja u nivou temelja za amortizacioni period od 200 godina data su na sledeći način:

Temperature loads at arch dams are as result of the difference between the temperatures at which joints are grouted, i.e. monolithize the body of dam, and temperature in the concrete during exploitation of the object.

Temperature distribution along the thickness of the dam primary depends on its own thickness. For thin arch dams, such as „Sv. Petka”, real approximation is linear distribution of temperature from the upstream face toward downstream face. Linear temperature distribution can be obtained by simplified method [1] or by the finite element method (FEM). For this kind of thin dam quite satisfactory approach is the simplified method, which is very often used also for thick dams. Temperature analysis using simplified method described in [1] is used for this dam. For conduction of this method it is necessary to determine ambient temperature, reservoir water temperature and solar radiation effect.

For determination of the air temperature, estimates of the mean-daily and mean-annual air cycles are needed.

Beside these two temperature cycles, a third temperature cycle is also used to account for the maximum and minimum air temperatures at the site. This cycle is in period of 15 days. In the calculations for determination of concrete temperature, these cycles are presented as sine waves. For determination of temperature loads following data are necessary:

- (a) Mean-monthly temperatures (maximum, minimum and average)
- (b) Mean-annual temperatures
- (c) Highest recorded temperature
- (d) Lowest recorded temperature

For determination of temperature cycles of the dam „Sv. Petka” meteorological data of the three nearest hydro-meteorological stations „Makedonski Brod”, „Skopje-Petrovec” and „Tetovo” are analyzed. Necessary data over the period from 1960 to 1990, i.e. 30 years long period, are processed.

For analysis of the dam „Sv. Petka”, measured temperatures of the water in the existing reservoir „Matka”, that is 5.9 km downstream from „Sv. Petka”, over the period from 1971 to 1988 are used. With small corrections of the summer temperature in the upper water layers of the reservoir, diapason of extreme temperatures during summer and winter conditions is acquired.

In absence of measured data for solar radiation, in literature, it is quoted that it increases the concrete temperature with order of magnitude from 0.5 till 1.0°C.

All necessary calculations for determination of the temperatures in the concrete for the three characteristic cycles of all three meteorological stations are performed by the method that is suggested in [1,2,3] and described in [4] by Bureau of Reclamation. In the following calculations results obtained from the meteorological station „Makedonski Brod” are used, taking in consideration also the gradients that exist between upstream and downstream face of the dam.

The Institute for Earthquake Engineering and Engineering Seismology at the University „St. Cyril and Methodius” - Skopje specified and designed seismic parameters for the dam „Sv. Petka”.

Design accelerations at the level of basic rock for amortization period of 200 years are given as it follows:

- for Design earthquake Z1 with level of acceptable

– Za projektni zemljotres Z1 sa stepenom prihvatljivog seizmičkog rizika od 30%, maksimalno projektno horizontalno ubrzanje iznosi  $a_{maks}=0.25g$ ;

– Za projektni zemljotres Z2 sa stepenom prihvatljivog seizmičkog rizika od 10%, maksimalno projektno horizontalno ubrzanje iznosi  $a_{maks}=0.35g$ .

Radi analize seizmičke stabilnosti brane „Sv. Petka”, predložena je primena spektralne analize i praćenje vremenske istorije ubrzanja sledećih registrovanih zemljotresa:

– *Albatros* (AL), Ulcinj, registrovan na steni tokom zemljotresa u Crnoj Gori 1979. godine, magnitude  $M=7,0$ ;

– *Robić*, registrovan na steni tokom zemljotresa u Furlaniji (Severna Italija), magnitude  $M=6,1$ ;

– *El Centro*, SAD (1940), magnitude  $M=6,1$ .

Na osnovu prethodno navedenog, dobijene su komponente N-S i E-W. Kombinacije opterećenja dobijene su na osnovu Priručnika za projektovanje lučnih brana [1].

## 5 MATEMATIČKI PRORAČUNSKI MODEL

Brana „Sv. Petka” analizirana je FEM metodom kao linearno elastična kontinualna struktura. Shodno tome, pretpostavljeno je da se u uslovima statičkih i dinamičkih opterećenja ponaša na monolitičan način. Analiza je urađena na osnovu sledećih pretpostavki.

### 5.1 Pretpostavka modela

Konstrukcija brane je idealizovana kao sklop dva tipa elemenata. U unutrašnjem regionu korišćeni su debeli površinski elementi sa 16 čvorova (132 el.), a u regionima uz obale – trodimenzionalni elementi sa po 16 čvorova (50 el.). Kod oba tipa postoje nepravilni elementi trouglastog oblika. Stenoviti temelj modeliran je pomoću trodimenzionalnih elemenata od kojih svaki ima po 8 čvorova (338 el.). Zahvaljujući tim elementima, brana doseže do dubine od jedne njene visine. Brana i njen temelj su idealizovani kao sklop konačnih elemenata sa 1742 čvora sa ukupno 5226 stepeni slobode.

### 5.2 Pretpostavka interakcije između brane i temelja

Interakcija između brane i njenog temelja ostvarena je uključivanjem odgovarajućeg dela stene u mrežu konačnih elemenata. Efekti inercije i prigušivanja stenovitog temelja su ignorisani, a razmatrana je samo fleksibilnost. Pošto se elementi generišu automatski, uzeto je da dolina ima profil prizme. Granica ovog sloja u analizi dobijena je u dubini jedne visine brane i daje polukrug u ravni normalnoj na dodirnu tačku brane i njenog temelja.

### 5.3 Pretpostavka interakcije između brane i vode u akumulaciji

Inercijalni efekti vode u akumulaciji, kao posledice seizmičkog opterećenja, predstavljeni su kao ekvivalentna masa koja se dodaje masi betona u dinamičkoj analizi. Za određivanje inercijalnih efekata,

seismic risk of 30%, maximum design horizontal acceleration is specified with  $a_{maks}(g)=0.25$

– for Design earthquake Z2 with level of acceptable seismic risk of 10%, maximum design horizontal acceleration is specified with  $a_{maks}(g)=0.35$

Response spectra concept and time-history analysis of the following cases of registered earthquakes are suggested for the analysis of seismic stability of the dam "Sv.Petka" such as:

– Albatros (AL), Ulcinj, registered on rock during the earthquake in Montenegro on 15/04/1979 with magnitude  $M=7.0$

– Robich, registered on rock during the earthquake in Furlanija – North Italy with magnitude  $M=6.1$

– El Centro, U.S.A., in 1940, with magnitude  $M=6.1$

Taking this in consideration, components N-S and E-W are given.

Loading combinations are acquired according to Manual for designing arch dams [1].

## 5 MATHEMATICAL MODEL FOR CALCULATION

Dam "Sv. Petka" is analyzed by FEM as linear elastic continuous structure. Taking this in consideration, its monolithic behaviour on static and dynamic loads is assumed. Analysis process according to following assumptions:

### 5.1 Assumption for the model

The body of the dam is idealized as an assemblage of two types of elements. In the internal region, thick shell elements with 16 node points (132 el.), and in the regions near the abutments, three-dimensional shell elements each with 16 node points (50 el.) are used. In both types degenerated elements with triangle shape exist. Foundation rock is created with three-dimensional elements each with 8 node points (338 el.). These elements extend in the foundation in depth of one height of the dam. The dam and the foundation are idealized as an assemblage of finite elements with 1742 node points with total 5 226 degrees of freedom.

### 5.2 Assumption for interaction between the dam and the base

Influence of the interaction between dam and the base is accomplished by involving of appropriate part of the rock in the mesh of finite elements. The inertial and damping effects of the foundation rock are ignored and only its flexibility is considered. Because of automatic generating of elements, it is assumed prismatic profile of the valley. The border of this layer in conducted analysis is acquired in depth of one height of the dam and is constructed as half circle in plane normal to the contact dam-foundation.

### 5.3 Assumption for interaction between the dam and the reservoir water

The inertial effects of the water in the reservoir due to seismic loading are represented by equivalent added-mass which is added to the mass of the concrete for

voda u akumulaciji je idealizovana konačnim elementima nestišljive tečnosti na udaljenosti od oko tri visine brane.

Tokom određivanja deformacije i naponskog stanja, nailazimo na dva problema: pretpostavke su nepouzdana, a podaci nedovoljni. Čak i pri donošenju relativno jednostavnih pretpostavki, postoje veliki problemi u pogledu interpretacije rezultata i specifikacije kriterijuma projektovanja za usvajanje analize. Ovde se obično nameće problem velikih napona koji se javljaju u blizini „singulariteta” ili „uglova”, u slučajevima kada se u analizi koriste modeli linearno-elastičnog ponašanja. U matematičkom modelu koji je dobijen za analizu brane „Sv. Petka” i koji predstavlja derivat obimnih istraživanja i modifikacija, ne postoje „singulariteti” – ti modeli daju realne, kontinualne rezultate.

Sve statičke i dinamičke analize brane „Sv. Petka” obavljene su pomoću softverskog paketa EADAP (*Enhanced Arch Dam Analysis Program*). S ciljem grafičke prezentacije idealizacije, napravljen je poseban softverski program. U svrhu programa INGRES (za dodatnu masu) koji je integralni deo paketa, napravljen je jedan preprocesor, dok je i za tabele u kojima se prikazuju rezultati zasebnih faza proračuna takođe napravljen poseban softver.

## 6 DINAMIČKA ANALIZA

Ponašanje betonske lučne brane, u uslovima opterećenja zemljotresom, određeno je pomoću trodimenzionalne linearno-elastične analize, uz korišćenje metode konačnih elemenata. Model obuhvata efekte interakcije između brane i stene u njenom temelju, kao i brane i vode u akumulaciji. Model koji se koristi za dinamičku analizu brane „Sv. Petka” isti je kao i model koji je korišćen za analizu statičkih uticaja. Kao ulazni podaci, korišćene su tri komponente seizmičkog delovanja.

Tokom analize ponašanja brane „Sv. Petka” u uslovima zemljotresa Z1, korišćeno je prigušenje od 5%, a u uslovima zemljotresa Z2 prigušenje od 10%.

Za određivanje uticaja prigušenja na stanje napona i deformacija, za zemljotres Z1 korišćena je analiza s prigušenjem od 7%, a za zemljotres Z2 – od 12%.

Prilikom procene uticaja zemljotresa na branu „Sv. Petka”, kao prvi korak korišćena je metoda spektralne analize. Dinamički naponi kombinovani su sa statičkim naponima u kombinacijama primarnih opterećenja i rezultati su upoređeni s dozvoljenim vrednostima. Prekoračenja granice dozvoljenog napona zatezanja, dobijena spektralnom analizom, nameću potrebu za rigoroznijom analizom – analizom vremenske istorije. Praćenjem istorije ubrzanja tokom određenog perioda, dolazimo do dodatnih informacija potrebnih za procenu bezbednosti brane, kao što su simultano pojavljivanje velikih napona u više zona, dužina njihovog trajanja i učestalost pojavljivanja. Uzimajući sve to u obzir, u sledećem koraku izvršena je dinamička linearno-elastična analiza, uz praćenje ponašanja brane putem istorije ubrzanja tri gorenavedena zemljotresa Z1 i Z2 (*Albatros*, *Robić* i *El Centro*). Izračunati su maksimalni naponi u svim tačkama modela u istoriji vremena za koje su data ubrzanja, te su kombinovani sa statičkim naponima. Određeno je i vreme pojavljivanja maksimalnih napona, a za karakteristične tačke određen je odgovarajući napon sa suprotne strane zida. Osim

dynamic analysis. For their determination, the reservoir water is idealized by finite elements of incompressible liquid at distance approximately of three heights of the dam.

During determination of deformation and stress state, we encounter two types of problems: unreliable assumptions that are being established, as well as insufficiency of appropriate data. Even by establishing of relatively simple assumptions in analysis, question of interpretation of the results and specification of design criteria for acceptance of analysis, encounters considerable difficulties. Here, typical is the question for the huge stresses that appear near the “singularities” or “angles” in cases when in the analysis are being used models with linear elastic behaviour. Acquired mathematical model for analysis of the dam Vs. Petra, which is derivate as a result of large amount of researches and modifications, is released of “singularities” and give real continuous results.

All static and dynamic analysis of the dam "Sv. Petka", are conducted with software package EADAP (*Enhanced Arch Dam Analysis Program*). Furthermore, new software has been made for graphic presentation of idealization. Also, pre-processor has been made for the programme INGRES (for added-mass) as an integral part of the package, as well as a software for table presentation of the results of the outcomes of the separate phases of calculations.

## 6 DYNAMIC ANALYSIS

Behaviour of the concrete arch dam to earthquake loads is determined with three-dimensional linear-elastic analysis using the finite element method. Model includes effects of the interaction between the dam and the rock in the foundation, and the dam with the reservoir water. Acquired model for dynamic analysis of dam "Sv. Petka" is the same as the one that is used to analyse dam on static influences. Three components of seismic action are used as entry data.

During the analysis of the dam “Sv. Petka” for earthquake Z1 damping of 5% from critical is used, and for earthquake Z2 10% from critical.

For determination of the influence of damping on the state of stresses and deformations, analysis for damping of 7 % for earthquake Z1 as well as for damping of 12 % for earthquake Z2, is used.

Method of spectral analysis is implemented as the first step in estimating earthquake influence on dam “Sv. Petka”. Dynamic stresses are combined with static stresses in usual loading combinations and compared with allowed values. Exceed above the allowed tension stress obtained from spectral analysis are imposing necessity for more rigorous analysis – time history analysis. Following the history of accelerations during time period allows additional information for estimation of safety of the dam, such as: simultaneous appearance of high stresses in several zones, length of their duration and frequency of it appearance. Taking this in consideration, dynamic linear-elastic analysis following the response of the dam on the history of accelerations of the three given earthquakes Z1 and Z2 (*Albatros*, *Robić*, *El Centro*) has been conducted in the next step. Maximum stresses are calculated in all points of the model in the history of time in which are given the

određivanja maksimalnih vrednosti napona, ova metoda omogućuje i istovremeno određivanje prekoračenja zadate vrednosti napona, koji ovde predstavlja dozvoljeni zatezni napon. Na osnovu ove analize, možemo zaključiti da li prekoračenja predstavljaju izolovane pojave ili se ponavljaju na velikoj površini brane. Proračuni pokazuju da mali deo prekoračenja predstavlja izolovanu pojavu.

## 7 KRITERIJUMI PROCENE REZULTATA

Kod betonskih lučnih brana, stabilnost se uglavnom procenjuje na osnovu kriterijuma za maksimalno dozvoljene napone pritiska i zatezanja, i stabilnosti obalnih delova. Kriterijumi projektovanja lučne brane „Sv. Petka” dobijeni su na osnovu [1], i za pojedinačne kombinacije opterećenja oni definišu zasebne koeficijente bezbednosti.

Dozvoljeni napon pritiska zavisi od pritiska čvrstoće i kombinacije opterećenja. Na osnovu dobijene marke betona MB30 ( $f_c = 30$  MPa, t.j.  $30\ 000$  kN/m<sup>2</sup>), dozvoljeni naponi pritiska kod statičkog opterećenja iznose:

- Statički uobičajeni (SU) -  $f_c = f_c' / 4 = 7\ 500$  kN/m<sup>2</sup>
- Statički neuobičajeni (SNU) -  $f_c = f_c' / 2,5 = 12\ 000$  kN/m<sup>2</sup>
- Statički ekstremni (SE) -  $f_c = f_c' / 1,5 = 20\ 000$  kN/m<sup>2</sup>

Zatezna čvrstoća betona ( $f_t$ ) zasnovana je na testu cepanja zatezanjem betona koji će se ugraditi u branu. U nedostatku rezultata testova, za vrednost  $f_t$  može se uzeti 10 % vrednosti pritiska čvrstoće  $f_c$ , drugim rečima –  $f_t = f_c / 10$ . Ova vrednost zasnovana je na brojnim testovima izvršenim na brani „Portugues” (USAED, Jacksonville, 1988) i konzistentna je s Rafaelovim testovima (1984). Sigurnosni koeficijenti zasnovani su na sveobuhvatnim ispitivanjima na terenu i u laboratoriji.

Dozvoljeni napon zatezanja za beton marke MB30 iznosi  $3000$  kN/m<sup>2</sup>.

Kod dinamičkih opterećenja, dozvoljeni naponi pritiska i zatezanja povećavaju se za 30%.

Dozvoljeni naponi pritiska:

- Dinamički uobičajeni (DU) -  $f_c = f_{cd} / 2,5 = 15\ 600$  kN/m<sup>2</sup>
- Dinamički ekstremni (DE) -  $f_c = f_{cd} / 1,5 = 26\ 000$  kN/m<sup>2</sup>
- Kod dinamičkog opterećenja, dozvoljeni napon zatezanja iznosi  $1,3 \times 3000 = 3900$  kN/m<sup>2</sup>

Dozvoljeni napon zatezanja jednak je zateznoj čvrstoći betona, što ukazuje na to da je koeficijent sigurnosti jednak 1.

Naponi zatezanja u modelu imaju mali uticaj na ponašanje lučnih brana. U sprovedenoj linearno-elastičnoj analizi, ove vrednosti korišćene su za procenu ponašanja brane – nemaju veliki fizički značaj, ali mogu da upozore na neophodnost uključivanja prslina u model.

Rafaelova (1984), kao i druga istraživanja, pokazuju da je izmerenu zateznu čvrstoću betona potrebno povećati koeficijentom komparabilnosti s rezultatima linearno-elastične FEM analize.

accelerations, and they are combined with the static stresses. Time of appearance of maximum stresses is determined and for characteristic points - appropriate stress of the opposite face. This method allows not only determination of maximal values of stresses but at the same time determination of number of excursions over specified value of the stress, which is allowable tension stress here. Due to this analysis we can conclude weather excursions are isolated exceptions or they appear repetitive at the considerable surface of the dam. Calculations show, that few exceed are entirely isolated phenomenon.

## 7 CRITERION FOR ESTIMATION OF THE RESULTS

In concrete arch dams estimation of stability mainly is made according to the criteria for maximal allowed compressive and tension stresses and stability of the banks. Design criteria of arch dam "Sv. Petka" are acquired according to [1] and for individual loading combinations they define separate coefficient of safety.

Allowed compressive stress depends on compressive strength and loading combination. Acquired class of concrete MB30 that is  $f_c' = 30$  MPa, i.e.,  $30\ 000$  kN/m<sup>2</sup>, allowed compressive stress for static loadings such as:

- Static Usual (SU)  $f_c = f_c' / 4 = 7\ 500$  kN/m<sup>2</sup>
- Static Unusual (SNU)  $f_c = f_c' / 2,5 = 12\ 000$  kN/m<sup>2</sup>
- Static Extreme (SE)  $f_c = f_c' / 1,5 = 20\ 000$  kN/m<sup>2</sup>

Tensile strength of the concrete,  $f_t$ , is based on the splitting test for tension of the concrete that will be built-in in the dam. In lack of test results, for value of  $f_t$  can be used 10% from compressive strength  $f_c$ , in other words,  $f_t = f_c / 10$ . This value is based on large amount of testing, performed in the dam Portuguese (USAED, Jacksonville, 1988) and is consistent with Raphael testing (1984). Safety factors are based on extensive terrain and laboratory investigations.

For class of concrete MB30 allowed tensile stress measures  $3000$  kN/m<sup>2</sup>.

For dynamic loads allowed compressive and tension stresses are increasing for 30%.

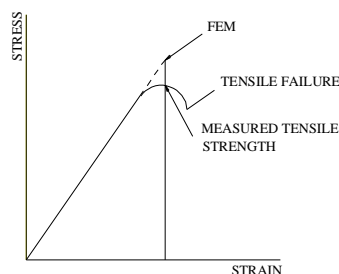
- Allowed compressive stresses for:
- Dynamic Usual (DU)  $f_c = f_{cd} / 2,5 = 15\ 600$  kN/m<sup>2</sup>
- Dynamic Extreme (DE)  $f_c = f_{cd} / 1,5 = 26\ 000$  kN/m<sup>2</sup>
- For dynamic loadings allowed tension stress measures  $1,3 \times 3000 = 3\ 900$  kN/m<sup>2</sup>.

Allowable tensile stress is equal to tensile strength of the concrete, which indicate that factor of safety measures one.

Tensile stresses in the evaluated model have small influence on the behaviour of arch dams. These values in conducted linear-elastic analysis, use as information to estimate the behaviour of the dam.

They do not have large physical significance, but can warn about the necessity of including the cracks in the model.

Raphael's investigations (1984), as well as other investigators show that the measured tensile strength in the concrete should be enlarged with coefficient of comparability with the results of the linear elastic analysis by FEM.



Slika 3.  $\sigma$ - $e$  dijagram (Raphael, 1984)  
Fig. 3 Diagram  $\sigma$ - $e$  (Raphael 1984)

Na slici 3 prikazan je Rafaelov  $\sigma$ - $e$  dijagram (1984) na kojem su prezentovani rezultati testa i FEM analize (linearno-elastični model).

Iz laboratorijskog testa se vidi da krivulja  $\sigma$ - $e$  nije proporcionalna deformacijama tokom celokupnog testa. U FEM modelu pretpostavlja se postojanje linearne zavisnosti tokom celokupnog testa.

Na osnovu rezultata Rafaelovog testa cepanja, čiji je cilj određivanje zatezne čvrstoće, zatezna čvrstoća u FEM modelu može se dobiti na osnovu izmerene zatezne čvrstoće, pomnožene sa 1.35. Ovaj koncept važi kako za statička, tako i za dinamička opterećenja.

Ovi dokazi i činjenice mogu se uzeti kao elementi koji jačaju sigurnost brane „Sv. Petka”.

Lučne brane poseduju veliku čvrstoću i kod ovakvih brana do sada nije zabeleženo nijedno rušenje izazvano zemljotresom. Kada se analiza vrši kao linearna sa FEM, u zavisnosti od intenziteta ubrzanja u osnovi i elasto-mehaničkih karakteristika materijala u konstrukciji i temelju brane, lučne brane – generalno gledano – izložene su visokim naponima zatezanja u lukovima u gornjem delu brane i u donjem delu konzola.

## 8 REZULTATI STATIČKE ANALIZE

Za sve kombinacije opterećenja (statičko uobičajeno, statičko neuobičajeno i statičko ekstremno) izvršene su detaljne analize napona i deformacija u specifičnim tačkama konstrukcije brane. Sopstvena težina ispitana je u dve faze: brane koja se sastoji od izolovanih monolita (faza pre injektiranja spojeva) i brane kao monolitne strukture (nakon injektiranja spojeva).

Analizirana su dva nivoa vode u akumulaciji, 357,30 m i 364 m nadmorske visine. Ovde ćemo objasniti samo normalni nivo vode, to jest 357,30 m nadmorske visine. Brana „Sv. Petka” analizirana je u pogledu dva ekstremna temperaturna uslova – zimskog i letnjeg.

Za određivanje temperaturnih napona važna je temperatura injektiranja spojeva, kao i koeficijent termičke ekspanzije. Kao temperatura injektiranja spojeva na brani „Sv. Petka” usvojeno je 8 °C, što odgovara lokalnim klimatskim uslovima, a na osnovu nje izračunata je „beznaponska temperatura”.

Vrednost koeficijenta termičke ekspanzije, usvojena u analizi, iznosi  $\alpha_t = 9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ . Daljim ispitivanjem betona, dobijena je vrednost za koeficijent termičke

At Fig. 3 is shown the diagram  $\sigma$ - $e$  by Raphael (1984) in which is the results of the test and FEM analysis (linear-elastic model).

From the laboratory test it can be seen that the curve  $\sigma$ - $e$  is not proportional with dilatations during the entire test. In the model by FEM it is presumed linear dependence during the entire test.

Based on the results from the splitting test for determination of tensile strength, by Raphael, tensile strength in FEM can be obtained from measured tensile strength multiplied by 1.35. This concept refers to static as well as dynamic loadings.

These evidence and facts can be taken as element that increases the safety of the dam “Sv Petka”.

Arch dams have remarkable strength and till now there is no registered earthquake collapse of this type of dams. When analysis is conducted as linear with FEM, depending from the intensity of acceleration in the foundation base and elastic-mechanical characteristic of the materials in the body and foundation base of the dam, an arch dam generally will be exposed to high tensile stresses in the arches in the upper part of the dam and in the lower part on cantilevers.

## 8 RESULTS FROM THE STATIC ANALYSIS

For all loading combinations (static usual SU, static unusual SUN and static extremes SE) detail analysis of the stresses and deformations in specific points of the body of the dam are performed. Dead weight is examined in two phases: the dam composed of isolated monoliths (in a phase before joint grouting) and treatment of the dam as monolithic structure (after joint grouting).

Two levels of water in the reservoir, that is at elevation 357.30 m.a.s.l. and elevation 364 m.a.s.l. are analyzed. Here matter of discussion will only be the results for normal level of the water in the reservoir, respectively, at elevation 357.30 m.a.s.l. Dam “Sv. Petka” is analyzed on two extreme cases of temperature influences: winter and summer conditions.

The temperature of joints closing as well as coefficient of thermal expansion is important for determination of temperature stresses. Temperature of joint grouting of dam “Sv. Petka” is 8 °C, which suits the

ekspanzije  $\alpha_t = 7,3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  (naponska stanja su linearno proporcionalna ovom parametru).

Pri visini vode od 357,30 m nadmorske visine, dobijena je sledeća naponska slika:

- Uzvodna strana

Naponi koji se javljaju na uzvodnoj strani konzole u debelim ljuskastim elementima uglavnom su naponi pritiska, čiji najveći intenzitet iznosi  $-1520 \text{ kN/m}^2$ .

Naponi zatezanja maksimalne vrednosti  $+303 \text{ kN/m}^2$  javljaju se u ograničenoj zoni od nekoliko elemenata između 305 m i 325 m nadmorske visine.

Trodimenzionalni debeli ljuskasti elementi iznad 340 m nadmorske visine takođe su izloženi pritisku maksimalne vrednosti  $-548 \text{ kN/m}^2$ . Ispod 340 m nadmorske visine u trodimenzionalnim debelim ljuskastim elementima javljaju se naponi zatezanja maksimalne vrednosti  $+1260 \text{ kN/m}^2$  između 300 m i 305 m nadmorske visine.

Naponi u lukovima iznad 305 m nadmorske visine sa uzvodne strane brane jesu naponi pritiska. Ekstremni naponi pritiska javljaju se u centralnom delu debelih ljuskastih elemenata, a njihov intenzitet iznosi  $-2560 \text{ kN/m}^2$ , dok se u pravcu trodimenzionalnih debelih ljuskastih elemenata u gornjem delu ti naponi smanjuju do nulte vrednosti.

Po celoj dodirnoj površini brane i njene osnove naponi su zatezni, s maksimalnom vrednošću od  $+1320 \text{ kN/m}^2$ , između 310 m i 315 m nadmorske visine. U kontaktnoj zoni između 357 m i 364 m nadmorske visine, u jednoj tački javljaju se i naponi zatezanja intenziteta  $+1310 \text{ kN/m}^2$ .

Tangencionalni naponi sa uzvodne strane nalaze se u rasponu između  $+722$  i  $-563 \text{ kN/m}^2$  i to uglavnom u dodirnoj površini brane i njene osnove.

Maksimalni glavni naponi sa uzvodne strane u debelim ljuskastim elementima uglavnom su naponi pritiska. Glavni naponi zatezanja javljaju se u trodimenzionalnim debelim ljuskastim elementima između 300 m i 305 m nadmorske visine, a njihova maksimalna vrednost iznosi  $+1380 \text{ kN/m}^2$ .

Minimalni glavni naponi sa uzvodne strane uglavnom su naponi pritiska, čija najveća vrednost iznosi  $-2560 \text{ kN/m}^2$ , i to u središtu centralne konzole. Naponi zatezanja javljaju u dve donje trećine, na dodirnoj površini brane i osnove, uz maksimalnu vrednost od  $+1120 \text{ kN/m}^2$ , i to između 310 m i 315 m nadmorske visine.

- Nizvodna strana

Konzolni naponi s nizvodne strane u donjem delu brane, posebno oko površine dodira i u njoj, jesu naponi pritiska, dok se u ostalim elementima javljaju naponi zatezanja. Najveći naponi pritiska, čiji intenzitet iznosi  $-2080 \text{ kN/m}^2$ , javljaju se između 300 m i 305 m nadmorske visine. U zoni kontakta iznad 325 m nadmorske visine, javljaju se isključivo naponi zatezanja, a njihov intenzitet kreće se između  $+765$  i  $+930 \text{ kN/m}^2$ .

S nizvodne strane, svi lučni naponi su naponi pritiska, osim u gornja dva elementa kontakta između brane i njene osnove i u elementima centralne konzole između 300 m i 325 m nadmorske visine. Maksimalni naponi pritiska javljaju se oko dodirne površine brane i

local climate conditions and further calculation have been made as "Stress-free temperature".

Coefficient of thermal expansion in analysis is  $\alpha_t = 9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ . In further investigations of the concrete, coefficient of thermal expansion with value  $\alpha_t = 7.3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  is obtained (stress conditions are linearly proportional to this parameter).

For level of reservoir at elevation 357.30 m.a.s.l. the following stress picture is obtained.

- Upstream face:

Cantilever stresses in upstream face of the dam in the thick shell elements mostly are on compression. Highest intensities are till  $-1520 \text{ kN/m}^2$ .

Tensile stresses with highest value of  $+303 \text{ kN/m}^2$  appear in limited zone on few elements between elevation 305 and 325 m.a.s.l.

3D thick shell elements above elevation 340 m.a.s.l. are also exposed on pressure with maximal value till  $-548 \text{ kN/m}^2$ . Below elevation 340 m.a.s.l. at 3D thick shell elements appear tensions with maximal value of  $+1260 \text{ kN/m}^2$ , between elevation 300 and 305 m.a.s.l.

Arch stresses above elevation 305 m.a.s.l. on the upstream face of the dam are on pressure. Extreme compressive stresses are in the central part of the thick shell elements with intensity till  $-2560 \text{ kN/m}^2$ , while, toward 3D thick shell elements in the upper part are reducing till null value.

On entire contact dam-foundation, stresses are tensile with maximal value of  $+1320 \text{ kN/m}^2$  between elevation 310 and 315 m.a.s.l. In the contact zone between elevation 357 and 364 m.a.s.l., it also appear tensile stress in one point with intensity of  $+1310 \text{ kN/m}^2$ .

Tangential stresses on the upstream face are in the limits  $+722 \div -563 \text{ kN/m}^2$ , located mainly on the contact dam-foundation.

Maximal principal stresses on upstream face in the thick shell elements mainly are compressive. Principal tensile stresses appear in all 3D thick shell elements with maximal value of  $+1380 \text{ kN/m}^2$  between elevation 300 and 305 m.a.s.l.

Minimal principal stresses on the upstream face mostly are compressive with extreme value of  $-2560 \text{ kN/m}^2$ , in the middle of the central cantilever. Tensile stresses appear in the lower two thirds on the contact dam-foundation with maximum value of  $+1120 \text{ kN/m}^2$ , between elevation 310 and 315 m.a.s.l.

- Downstream face:

Cantilever stresses on the downstream face in the lower part of the dam, especially close to the contact and in the contact are compressive, while in the rest of the elements are on tension. Extreme compression stresses appears between elevation 300 and 305 m.a.s.l. with intensity of  $-2080 \text{ kN/m}^2$ . In the zone of the contact above elevation 325 m.a.s.l., stresses are solely tensile in the limits of  $+765 \div +930 \text{ kN/m}^2$ .

On downstream face all arch stresses are compressive, except at the top two elements of the contact dam-foundation and in the elements of the central cantilever between elevation 300 and 325 m.a.s.l. Maximum compressive stress is near the contact dam-foundation and its intensity measures  $-1730 \text{ kN/m}^2$ .

njenog temelja, a njihov intenzitet iznosi  $-1730 \text{ kN/m}^2$ . Najveći naponi zatezanja javljaju se u centralnoj konzoli između 300 m i 305 m nadmorske visine, a njihov intenzitet iznosi  $+1460 \text{ kN/m}^2$ .

Tangencionalni naponi s nizvodne strane nešto su veći od napona sa uzvodne strane, i kreću se između  $+662$  i  $+1880 \text{ kN/m}^2$ , a javljaju se uglavnom na dodirnoj površini između brane i njene osnove.

Svi maksimalni glavni naponi s nizvodne strane jesu naponi zatezanja, a njihov intenzitet je veći u kontaktu između brane i njene osnove. Najveći napon zatezanja, intenziteta  $+1470 \text{ kN/m}^2$ , javlja se između 300 m i 305 m nadmorske visine.

U blizini krune brane, na dodirnoj površini brane i njene osnove, takođe se javljaju naponi zatezanja prosečnog intenziteta  $+1300 \text{ kN/m}^2$ .

Minimalni glavni naponi s nizvodne strane uglavnom su naponi pritiska, čija najveća vrednost dostiže  $-3290 \text{ kN/m}^2$  na visini između 305 m i 310 m nadmorske visine, i to u blizini dodirne površine brane i osnove.

Na osnovu sprovedene analize, može se zaključiti da su ekstremne vrednosti napona u ovoj kombinaciji opterećenja manje od dozvoljenih.

Dozvoljeni napon zatezanja iznosi  $+3000 \text{ kN/m}^2$ , a dozvoljeni napon pritiska  $-7500 \text{ kN/m}^2$ .

Kada se nivo vode nalazi na 364 m nadmorske visine, najveći glavni naponi zatezanja iznose  $+1800 \text{ kN/m}^2$  i javljaju se između 310 m i 315 m nadmorske visine. Minimalni regionalni naponi pritiska javljaju se na uzvodnoj strani i njihova maksimalna vrednost iznosi  $-3250 \text{ kN/m}^2$ .

Treba napomenuti da je intenzitet maksimalnih napona zatezanja upola manji od dozvoljenog, dok je maksimalni intenzitet napona pritiska trostruko manji od dozvoljenog.

Ako se osvrnemo na mehanizam gubitka nosivosti lučnih brana, primetno je da postoje dovoljne rezerve pritiskne čvrstoće koje se aktiviraju u fazi redistribucije opterećenja s konzola na lukove.

Maksimalno pomeranje brane u zimskim uslovima iznosi 10,6 mm u nizvodnom smeru, a u letnjim 4,6 mm u uzvodnom smeru.

## 9 REZULTATI DIMANIČKE ANALIZE

Analiza slobodnih oscilacija brane „Sv. Petka“ sprovedena je kako u uslovima pune, tako i u uslovima prazne akumulacije.

Sledi prvih sedam perioda oscilacija sistema brana–temelj–akumulacija.

*Periodi slobodnih oscilacija  
Periods of the free oscillations*

Modalitet br. Mode No.	Puna akumulacija Full reservoir [sec]	Prazna akumulacija Empty reservoir [sec]
1	0.2235	0.1935
2	0.1795	0.1538
3	0.1437	0.1203
4	0.1077	0.0977
5	0.1033	0.0905
6	0.0960	0.0807
7	0.0790	0.0742

The largest tensile stresses appear in the central cantilever between elevation 300 and 305 m.a.s.l. and its intensity measures  $+1460 \text{ kN/m}^2$ .

Tangential stresses on downstream face show slightly higher values from those on upstream face and they are in the limits of  $+662$  ÷  $+1880 \text{ kN/m}^2$ , located mostly on the contact, dam-foundation.

All maximum principal stresses on downstream face are tensile with higher intensities on the contact dam-foundation, where the highest tensile stress appears between elevation 300 and 305 m.a.s.l. with intensity of  $+1470 \text{ kN/m}^2$ .

Also, near the crown of the dam, at the contact dam-foundation zone tensile stresses with intensity in average of  $+1300 \text{ kN/m}^2$  appear.

Minimum principal stresses on the downstream face are mainly compressive and reach extreme value with intensity of  $-3290 \text{ kN/m}^2$ , between elevation 305 and 310 m.a.s.l., near the contact, dam-foundation.

From the performed analysis it can be concluded that the extreme values of stresses are below allowed for this combination of loading.

Allowable tensile stress is  $+3000 \text{ kN/m}^2$ , while allowable compressive stress is  $-7500 \text{ kN/m}^2$ .

When the water level is at elevation 364 m.a.s.l., the highest principal tensile stress measures  $+1800 \text{ kN/m}^2$  and it appears between elevation 310 and 315 m.a.s.l.. Minimum principal compressive stresses are on the upstream face with maximal value of  $-3250 \text{ kN/m}^2$ .

It can be noticed that maximum stresses are more than double lower than allowed tensile, while compressive stresses are triple lower from allowed pressure.

Looking back at the mehanizam of losing bearing capacity of the arch dams sufficient reserve in the compressive strength is notable; it is being activated in the phase of redistribution of loads from cantilevers on arches.

Maximum resulting displacement of the dam in winter conditions measures 10.6 mm downstream, and in summer conditions measures 4.6 mm upstream.

## 9 RESULTS FROM THE DYNAMIC ANALYSIS

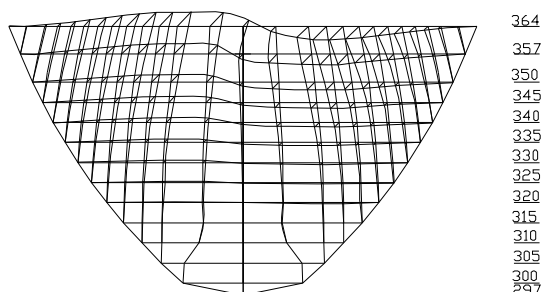
Analysis of free vibrations of the dam „Sv. Petka“ is performed for full and empty reservoir.

First seven periods of free vibrations of the system dam-foundation-reservoir are:

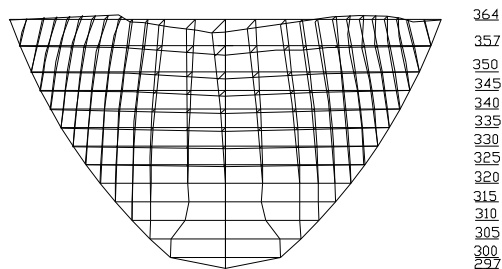


U proračunima su dobijeni i oblici slobodnih oscilacija, a prva tri tona prikazana su na slikama 4, 5 i 6. U sistem brana–temelj–akumulacija uključene su tri ortogonalne komponente pomeranja temelja.

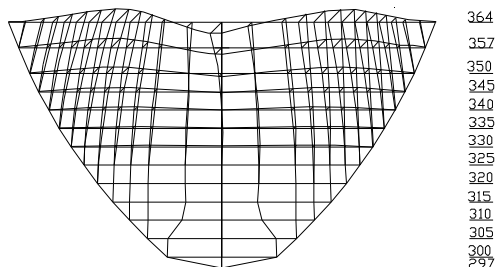
The forms of the free vibrations are also obtained in the calculation and the first three modes are shown on the Figures 4, 5 and 6. Three orthogonal components of movement of foundation base are included in the system dam–foundation–reservoir.



*Slika 4. Prvi ton oscilacija,  
T<sub>1</sub>= 0,2235 sec (puna akumulacija)  
Fig.4 First Mode of Vibration  
T<sub>1</sub>= 0.2235 sec (Full Reservoir)*



*Slika 5. Drugi ton oscilacija,  
T<sub>2</sub>= 0,1795 sec (puna akumulacija)  
Fig. 5. Second Mode of Vibration  
T<sub>2</sub>= 0.1795 sec (Full Reservoir)*



*Slika. 6. Treći ton oscilacija,  
T<sub>3</sub>= 0,1437 sec (puna akumulacija)  
Fig. 6. Third Mode of Vibration  
T<sub>3</sub>= 0.1437 sec (Full Reservoir)*

S obzirom na to što su naponi iz dinamičke analize, sprovedene na osnovu pojedinih spektara ili istorija ubrzanja datih zemljotresa, superponirani s naponima statičkih opterećenja (regulisanih u kombinacijama dinamičkog opterećenja), direktno je moguće posmatrati samo komponentalne napone, to jest u lukovima i konzolama. U rezultatima dinamičke analize koja je sprovedena pomoću softvera EADAP dati su samo komponentalni naponi.

Naponi usled dejstva zemljotresa uvek su pozitivni. U analizi su tabelarno ili grafički prikazane kombinacije statičkih opterećenja, kao i alternativni efekti spektra, to jest praćenje istorije ubrzanja analiziranih zemljotresa.

Na osnovu analize, može se zaključiti da su naponi zatezanja merodavni, te da su naponi pritiska u smeru dve komponente takođe pod kontrolom. Analiza ulaznih podataka zemljotresa sprovedena je korišćenjem dveju uobičajenih metoda – metode spektralne teorije i metode vremenske istorije – i kao takva biće i tumačena.

Taking into consideration that the stresses specified in the dynamic analysis from individual specters or histories of accelerations of the given earthquakes are superposed with those of the static loads (regulated in the dynamic loading combinations), only the componential stresses can be monitored directly: those of the arches and cantilevers. In the output of the dynamic analysis of the software EADAP only componential stresses from the analysis on earthquake are given.

Earthquake stresses are always positive. The combinations from the static loads and alternative effect from spectra i.e. histories of accelerations of analyzed earthquakes are shown in the analysis using graphic or appropriate table form.

Due to the performed analysis it can be concluded that tensile stresses are authoritative, and compressive stresses in the two componential directions are controlled also. Analysis on earthquake input are performed using two common methods: spectral theory and time-history, and as such will be interpreted.

- Spektralna analiza

Najnepovoljnija kombinacija opterećenja je sledeća:

- sopstvena težina (SW);
- normalni nivo vode u akumulaciji – 357,30 m nadmorske visine;
- temperatura – zimska (minimalna temperatura);
- inercijalne sile koje potiču od mase brane;
- inercijalne sile koje potiču od vode u akumulaciji;
- zemljotres *Albatros* sa  $a_{maks} = 0,35g$  i 10% prigušenja.

Dozvoljene vrednosti napona zatezanja u konzolama ni u jednoj tački nizvodne i uzvodne strane nisu prekoračene. Naponi zatezanja sa uzvodne strane su mali, sa izuzetkom nadmorske visine od 303,75 m, gde su reda veličine maksimum  $+2550 \text{ kN/m}^2$ . Naponi pritiska svoju kritičnu vrednost od  $-3010 \text{ kN/m}^2$  dostižu u centralnoj konzoli. S nizvodne strane, naponi zatezanja dostižu maksimum  $+2213 \text{ kN/m}^2$ , i to u gornjem delu dodirne površine brana-osnova, dok se kritična vrednost napona pritiska od  $-2302 \text{ kN/m}^2$  javlja na najnižoj tački od 303,75 m nadmorske visine.

Sa uzvodne strane, dozvoljeni napon zatezanja u luku prekoračen je u pet tačaka. Te tačke se nalaze u centralnoj konzoli, u najvišem delu dodirne površine brana-osnova. Dve tačke se nalaze iznad normalnog nivoa vode u akumulaciji (357,3 m nadmorske visine), i u njima vrednost napona iznosi  $+5860 \text{ kN/m}^2$  i  $+4910 \text{ kN/m}^2$ . U preostale tri tačke naponi su  $+3990 \text{ kN/m}^2$ ,  $+4204 \text{ kN/m}^2$  i  $+4171 \text{ kN/m}^2$ , a nalaze se na dodirnoj površini brana-osnova, iznad 348,95 m nadmorske visine. Preostali naponi znatno su manji. Kritična vrednost pritiska iznosi  $-8020 \text{ kN/m}^2$ .

S nizvodne strane, prekoračenja dozvoljenog napona zatezanja javljaju se u dve zone gornjeg dela brane: u centralnoj konzoli i u jednoj četvrtini. Više od polovine tih prekoračenja javljaju se iznad normalne visine vode (357,3 m nadmorske visine), odnosno u delu koji nije pod vodom. Prekoračenja se kreću između  $+3903 \text{ kN/m}^2$  i  $+4958 \text{ kN/m}^2$ . Najveća vrednost napona pritiska iznosi  $-6271 \text{ kN/m}^2$ .

Na osnovu komentara u pogledu naponskog stanja statičkih opterećenja pri normalnoj visini vode u akumulaciji (357,3 m nadmorske visine) tokom zimskih uslova i zemljotresa Z2 – A1, može se zaključiti sledeće:

1. Dozvoljeni naponi zatezanja u konzoli ni u jednoj tački brane nisu prekoračeni.

2. U malom broju tačaka sa uzvodne strane brane (koja je u dodiru sa vodom) na gornjem delu dodirne površine brana-osnova postoje mala prekoračenja dozvoljenog napona zatezanja. U nekim, donekle nepovoljnim situacijama s nizvodne (suve) strane, postoje tri zone u gornjem delu (vrhu) brane u kojima se javljaju prekoračenja dozvoljenog napona zatezanja: centralna konzola, deo od jedne četvrtine i dodirna površina između brane i osnove. Veći deo ovih tačaka nalazi se iznad normalnog nivoa vode u akumulaciji (357,3 m nadmorske visine).

3. Kritični napon pritiska iznosi  $-8020 \text{ kN/m}^2$ , to jest 3,2 puta je manji od dozvoljenog.

Ovi zaključci koji se odnose na stanje napona i deformacija, kao posledice statičkih opterećenja zemljotresa +/-Z2, predstavljeni su samo kao kvalitativni i kvantitativni indikatori iz jedne metode koja se obično

- Spectral analysis.

Most unfavourable combination of loads is:

- Self-weight (SW)
- Normal level of water in the reservoir: elevation 357.30 m.a.s.l.
- Temperature – winter (min. temperature)
- Inertial forces from the mass of the dam
- Inertial forces from the water in the reservoir
- Earthquake *Albatros* with  $a_{max}(g)=0.35$  and 10% damping.

Allowable tensile stress is not exceeded at cantilever stresses in no one point on downstream and upstream face of the dam. Tensile stresses on upstream face are low, with exception of elevation 303.75 where they are with order of magnitude till  $+2550 \text{ kN/m}^2$ . Compressions have extreme values in the central cantilever and reach till  $-3010 \text{ kN/m}^2$ . On downstream face tension stresses reach till  $+2213 \text{ kN/m}^2$ , in the upper part of the contact, dam-foundation, while the extreme compression appears in the lowest point at 303.75 m.a.s.l. with value of  $-2302 \text{ kN/m}^2$ .

Arch stresses on upstream face show that in five points allowed tensile stress is exceeded. They are located in a central cantilever at the highest part and in contact dam-foundation. Two are above the normal level of water in the reservoir (357.3 m.a.s.l.) with values  $+5860 \text{ kN/m}^2$ , and  $+4910 \text{ kN/m}^2$ . The rest three points are with stresses  $+3990 \text{ kN/m}^2$ ,  $+4204 \text{ kN/m}^2$  and  $+4171 \text{ kN/m}^2$  and they are on the contact dam-foundation, above elevation 348.95 m.a.s.l. Rest of the stresses are remarkably lower. The extreme compression measures  $-8020 \text{ kN/m}^2$ .

On the downstream face exceeding of allowed tensile stress appear in two zones at the upper part of the dam: central cantilever and one quarter part. More than half of these exceeds are above elevation of the normal level of the water in the reservoir (357.3 m.a.s.l.), respectively, they are located in the part that is not covered with water. Exceeding is in order of magnitude from  $+3903 \text{ kN/m}^2$  till  $+4958 \text{ kN/m}^2$ . Extreme compressive stress measures  $-6271 \text{ kN/m}^2$ .

According to the comments about stress conditions of static loads with normal level of water in the reservoir (elevation 357.30 m.a.s.l.) during winter conditions and earthquake Z2 - A1 it can be concluded:

1. In no one point of the dam allowable tensile stress on cantilevers is exceeded.

2. On several points on upstream face of the dam (which is in contact with the water) at upper part of the contact dam-foundation there are small exceeds of the allowed tensile stress. In somewhat not so advantageous situation in a relation of exceeding of allowed tensile stress is downstream (dry) face, where exceeding appears in three zones in the upper part (top) of the dam: central cantilever, one quarter part and the contact dam-foundation.

Larger parts of these points are located above the normal level of the water in the reservoir (elevation 357.3 m.a.s.l.).

3. Extreme compressive stress is  $-8020 \text{ kN/m}^2$ , or, 3.2 times smaller than allowed.

These conclusions about stress and deformational conditions from static loads  $\pm$  Z2 of spectral analysis are presented only as qualitative and quantitative indicators

sprovodi kao preliminarna analiza.

Procedura praćenja ponašanja individualnih parametara analize vremenske istorije ubrzanja koristi se kada su maksimalne proračunske vrednosti napona po spektralnoj analizi blizu zatezne čvrstoće betona ili kada je premašuju. U tim slučajevima, primenjuje se linearno-elastična analiza, uz praćenje istorije ubrzanja, radi što preciznijeg određenja maksimalnih napona i dobijanja uvida u dinamički odgovor brane tokom vremena.

Kada maksimalni naponi poremašuju dozvoljene vrednosti, praćenjem vremenske istorije kritičnih napona potrebno ih je preciznije ispitati i proceniti. Ta procena maksimalnih napona tokom vremenske istorije ubrzanja sastoji se od praćenja odgovora brane tokom vremena, s ciljem određivanja broja ciklusa u kojima su maksimalno dozvoljene vrednosti napona prekoračene. Na taj način pokazaće se da li prekoračenja graničnih vrednosti predstavljaju izolovane slučajeve ili se ona tokom procesa ponavljaju.

- Praćenje ubrzanja po istoriji vremena

Prekoračenje dozvoljenog napona zatezanja, dobijenog spektralnom analizom, nameće potrebu za rigoroznijom analizom, odnosno za analizom odgovora brane uz praćenje istorije ubrzanja za gorenavedene zemljotrese. Praćenjem istorije ubrzanja u datom periodu, dobijamo dodatne informacije za procenu sigurnosti brane, kao što su simultano javljanje visokih napona u više zona, dužina njihovog trajanja i učestalost pojavljivanja.

Seizmički ulazni elementi za ovu linearnu dinamičku analizu sastoje se od tri komponente ubrzanja tla usled zemljotresa.

Najnepovoljniji je odgovor na zemljotres *Albatros*, posebno u zimskim uslovima, čiji su rezultati ovde predstavljeni. Analizirani su slučajevi pune i prazne akumulacije.

U slučaju prazne akumulacije, ispitana su dva slučaja: s neinjektiranim spojnica i sa injektiranim spojnica.

PGA (maksimalno ubrzanje tla) za privremene konstrukcije i fazu građenja treba da bude reda veličine 50% projektnog zemljotresa (Eurocode 8-2002).

U uslovima neinjektiranih spojnica ispitani su najveći centralni blok. Rezultati pokazuju da je najveći uticaj imao zemljotres *Albatros* i da dozvoljeni napon zatezanja nije prekoračen ni u jednoj sekciji.

Faza gradnje – uslovi injektiranih spojnica – nema nikakav fizički značaj, pošto kada su spojevi otvoreni, brana reaguje konzolnim delovanjem samostalnih blokova. Ova analiza daje stanje napona pritiska i deformacija u slučaju kada su blokovi pritisnuti zemljotresom.

Pri punoj akumulaciji, uz zimske uslove i zemljotres Z1 – *Albatros* (ovaj zemljotres je merodavan u svim slučajevima), naponi zatezanja u lukovima sa uzvodne strane prekoračeni su u šest tačaka, od kojih se dve nalaze u centralnoj konzoli, u blizini krune, a intenzitet im je  $+4110 \text{ kN/m}^2$  i  $+4190 \text{ kN/m}^2$ , dok se četiri nalaze u gornjoj zoni dodirne površine brana–temelj, a intenzitet im se kreće od  $+3962 \text{ kN/m}^2$  do  $+4638 \text{ kN/m}^2$ . U ostalim tačkama, komponentalni naponi zatezanja (lučni i konzolni) ni u jednoj tački nisu prekoračeni. Najveći

from one method which usually is conducted as preliminary analysis.

Procedure for following the answer of individual parameters in the period of time history of acceleration (Time-History Analysis) is used when the calculated maximum values of stresses using the spectral analysis are close or exceed tensile strength of concrete. Linear-elastic analysis is implemented in these cases, monitoring the history of accelerations, with objective of more precise determination of maximum stresses and for obtaining review in dynamic response during time.

When maximum stresses show that they are exceeding allowed stress, time history of the critical stresses should be more precisely examined and evaluated. This evaluation of maximum stresses during the time of acceleration history consists of monitoring the response during time for determination of the number of cycles in which maximal stresses exceed allowed value. This will show whether exceeding over limited values is isolated case or it is repetitive during the process.

- Monitoring time history of accelerations (Time-History Analysis)

Exceeding allowable tensile stress obtained from spectral analysis impose the necessity for more rigorous analysis, respectively, necessity for analysis of the response of the dam following the history of acceleration of above mentioned earthquakes. Monitoring history of acceleration in period of time allows also additional information for estimation of the safety of the dam, as are: simultaneous occurrence of high stresses in several zones, length of their duration and frequency of its appearance.

Seismic input for this linear dynamic analysis consists of three components of acceleration of earthquake soil movement.

Most unfavourable is the response on the earthquake *Albatros*, especially during winter conditions, and results here will be presented.

Cases of full and empty reservoir are analyzed.

With empty reservoir, two cases are examined: non-grouted and grouted condition.

The PGA (Peak Ground Acceleration) for temporary structures and construction phase should be of order of 50% design earthquake (Eurocode 8-2002).

At non-grouted condition is examined on the highest central block. Results show that the earthquake *Albatros* had the largest influence, and in no one section allowable tensile stress is exceeded.

The construction phase – grouted condition does not have any physical meaning, because when the joints will be opened, the dam reacts with cantilever action of independent blocks. This analysis gives state of compressive stresses and deformations when the blocks are pressed by earthquake.

With full reservoir, winter conditions and earthquake Z1 - *Albatros* (this earthquake is competent in all cases), arch tensile stresses of the upstream face are exceeded in four elements in six points, of which, in two points of the central cantilever near the crown with intensity of  $+4110 \text{ kN/m}^2$  and  $+4190 \text{ kN/m}^2$  and in four points on the contact dam-foundation in upper zone with intensity from  $+3962 \text{ kN/m}^2$  to  $+4638 \text{ kN/m}^2$ . In the rest of the points componential tensile stresses (arch and cantilever) are

napon pritiska iznosi  $-7150 \text{ kN/m}^2$ , to jest manji je od dozvoljenog.

U kombinacijama statičkog opterećenja zemljotresa Z1, s nizvodne strane brane dozvoljeni napon zatezanja neznatno je prekoračen samo u gornjem centralnom elementu koji se nalazi iznad normalnog nivoa vode u akumulaciji (357,3 m nadmorske visine), i to u jednoj tački i s vrednošću od  $+4283 \text{ kN/m}^2$ . U ostalim tačkama, naponi zatezanja imaju relativno malu vrednost, a najveću vrednost (između  $+3000 \text{ kN/m}^2$  i  $+3289 \text{ kN/m}^2$ ) dostižu u gornjem delu dodirne površine brana-osnova. Najveći naponi pritiska su reda veličine  $-5631 \text{ kN/m}^2$  (dozvoljeni napon zatezanja iznosi  $+3900 \text{ kN/m}^2$ , dok je dozvoljeni napon pritiska  $-15600 \text{ kN/m}^2$ ). Da bi se odredio uticaj prigušenja na naponska stanja, izvršena je analiza za zemljotres *Albatros* ( $a_{\max}(g)=0,25$ ) i 7% prigušenja, a rezultati pokazuju da ne postoje prekoračenja dozvoljenih napona.

Pri punoj akumulaciji, u zimskim uslovima i zemljotresu Z2 – *Albatros*, naponi zatezanja u konzolama sa uzvodne i nizvodne strane daleko su manji od dozvoljene vrednosti.

Najveće vrednosti napona zatezanja u lukovima sa uzvodne strane brane javljaju se u gornjem delu centralne trećine brane, kao i u dodirnoj površini brane i osnove. Maksimalna vrednost tih napona od  $+3140 \text{ kN/m}^2$  javlja se u centralnoj konzoli. U gornjoj trećini dodirne površine brane i osnove, u trodimenzionalnim ljuskastim elementima, u 15 tačaka javljaju se veći naponi zatezanja od dozvoljenih, a njihov intenzitet kreće se između  $+3928 \text{ kN/m}^2$  i  $+5616 \text{ kN/m}^2$ .

Maksimalni zatezni naponi s nizvodne strane nalaze se na jednoj trećini dužine krune, i to u elementima u blizini krune, a njihov intenzitet kreće se između  $+3926 \text{ kN/m}^2$  i  $+4858 \text{ kN/m}^2$ .

Analiza s vrednostima zemljotresa *Albatros* od  $a_{\max}=0.35g$  i prigušenja od 12% ukazuje na to da u izolovanim zonama postoje minimalna prekoračenja, i to u zonama gde su bila najveća prekoračenja s prigušenjem od 10%.

- Analiza prekoračenja dozvoljenog napona zatezanja

Seizmičko ponašanje betonskih lučnih brana procenjuje se na osnovu napona u njihovim komponentama, koji se dobijaju putem linearno-elastične analize u kombinaciji sa inženjerskim procenama. Generalno gledano, u određenom broju tačaka brane zatezna čvrstoća betona može da bude prekoračena. U praksi, prihvaćeni kriterijum oštećenja je do pet ekskurzija napona preko zatezne čvrstoće betona, na osnovu inženjerske procene i drugih posmatranja. Ovaj kriterijum ne ograničava ni veličinu niti trajanje delovanja napona koji prekoračuju zateznu čvrstoću betona, niti nudi neke mere u pogledu prostornog rasporeda tih napona, već je na projektantu da proceni njihov intenzitet, kao i veličinu površine na koju deluju.

To je tradicionalni kriterijum koji je u poslednje vreme (prema podacima iz novije literature) dopunjen jednim sistematskim pristupom kojim se potvrđuje seizmičko ponašanje, kao i mogući stepen oštećenja putem primene linearno-elastične analize vremenske istorije.

U ovom predloženom kriterijumu oštećenja, performanse i stepen oštećenja procenjeni su na osnovu odnosa veličina potreba–kapacitet, kumulativnog trajanja

not exceeded at any point. Extreme compressive stress is  $-7150 \text{ kN/m}^2$ , i.e., lower than allowed.

In the combinations static loadings ± earthquake Z1, on the downstream face of the dam allowable tensile stress is quite insignificantly exceeded only in the upper central element that is above normal water level in the reservoir (elevation 357.30 m.a.s.l.) in one point with value of  $+4283 \text{ kN/m}^2$ . In all other points tensile stresses are with relatively low values that reach highest values in the upper part of the contact dam-foundation in order of magnitude  $+3000 \text{ kN/m}^2$  till  $+3289 \text{ kN/m}^2$ . Extreme compressive stresses are in the order  $-5631 \text{ kN/m}^2$ . (Allowable tensile stress is  $+3900 \text{ kN/m}^2$ , while allowable compressive stress is  $-15600 \text{ kN/m}^2$ .)

To determine the influence of damping on stress conditions, analysis for earthquake Z1 *Albatros* ( $a_{\max}(g)=0.25$ ) and 7% damping is conducted. The results show that there is no exceeding of allowed stresses.

With full reservoir, winter conditions and earthquake Z2 – *Albatros*, cantilever stresses on upstream and downstream face of the dam which are far lower of the allowed tensile stress.

Arch tensile stresses on upstream face of the dam with highest values appear in the upper part of the central and one-third cantilever as well as on the contact dam-foundation. In the central cantilever they reach maximum till  $+3140 \text{ kN/m}^2$ . At the contact dam-foundation in the upper third of the contact in 3D elements, appear higher tensile stresses of the allowed in 15 points with intensity of  $+3928 \text{ kN/m}^2$ , till  $+5616 \text{ kN/m}^2$ .

Maximal arch tensile stresses on downstream face are in the thirds of the length of the crown in the elements near crown of the dam, with intensity of  $+3926 \text{ kN/m}^2$ , till  $+4858 \text{ kN/m}^2$ .

Analysis of the earthquake *Albatros* with  $a_{\max}(g)=0.35$  and 12% damping show minimum exceeding in insulated zones and there is also the highest exceeding with 10% damping.

- Analysis of exceeding of allowable tensile stress

Seismic behaviour of concrete arch dams is estimated based on componential stresses obtained from linear elastic analysis, combined with engineering assessment. Generally, in certain number of points of the dam stresses in the concrete could exceed its tensile strength. In practice, traditional damage criteria was that up to five stress excursions above the tensile strength of the concrete have been considered acceptable, based on engineering judgment and other considerations. This criterion neither puts limit on the magnitudes and duration of stresses exceeding the tensile strength of concrete nor offers any provisions regarding the spatial extent of such stresses. It is left to designer to judge how high they are and how large an area they could occupy.

This is traditional criteria, which lately, according to the information of the newer literature, is complementing by systematic approach, with which is confirmed seismic behaviour and possible level of damage by using linear elastic time- history analysis.

In this proposed damage criteria, the performance evaluation and assessment of level of damage is formulated based on magnitudes of demand-capacity ratios, cumulative duration of stress excursions beyond the tensile strength of the concrete and spatial extent of

prekoračenja zatezne čvrstoće betona i površine prenapregnutih regiona.

Nakon sprovođenja celokupne analize, dobijene su tačke s najvećim naponima. U tom postupku, interesuju nas tačke u kojima su dozvoljeni naponi zatezanja prekoračeni.

Radi boljeg sagledavanja naponskog stanja i rezervi konstrukcije, detaljno je praćeno ponašanje tih tačaka u odnosu na prekoračenje napona u vremenu od  $(3\div 4)\cdot 2/100$  sekunde pre i posle dostizanja maksimalne vrednosti, kao i pre i nakon naredne maksimalne vrednosti (ako postoji).

Analizirani su svi elementi, to jest sve tačke u kojima je dozvoljeni napon prekoračen.

Na osnovu obavljene analize, moguće je zaključiti da se u svakoj zoni javlja samo po jedno prekoračenje, dok presek funkcioniše u uslovima pritiska i savijanja, to jest napon sa suprotne strane jeste napon pritiska.

Za branu „Sv. Petka” izrađena su dva dijagrama kumulativnog prekoračenja u svim tačkama sa uzvodne i nizvodne strane brane, u kojima je zatezna čvrstoća betona prekoračena. Na njima se vidi veliko odstupanje od prave linije koja razdvaja prihvatanje linearno-elastične teorije od potrebe za primenom nelinearne analize (liniju definiše zatezna čvrstoća betona sa ograničenim kapacitetom odnosa  $2\frac{\sigma}{f_t}$  - X osa i kumulativna dužina 0.4 sec -Y osa).

Na ovim dijagramima vidljivo je da linearno-elastična analiza rezultira veoma malim oštećenjima, čak i u slučaju zemljotresa Z2 (Albatros sa PGA = 0,35g i prigušenjem od 10%). Treba napomenuti da se ovi rezultati odnose samo na period godine u kojem je temperatura betona na minimalnoj vrednosti (zimski uslovi – najnepovoljniji uslovi).

Gornja trećina brane konstruktivno je armirana površinskom rebrastom armaturom.

overstressed regions.

The points with highest stresses are obtained due to the complete analysis. In this procedure, the points in which allowed tensile stress is exceeded are of interest.

For better inspection in stresses condition and reserves in the structure, the response of these points with the exceeded stresses is monitored in details by the time  $(3\div 4)\cdot 2/100$  sec before and after reaching of maximum value, as well as the next peak in which it reaches the next maximum (if such exist).

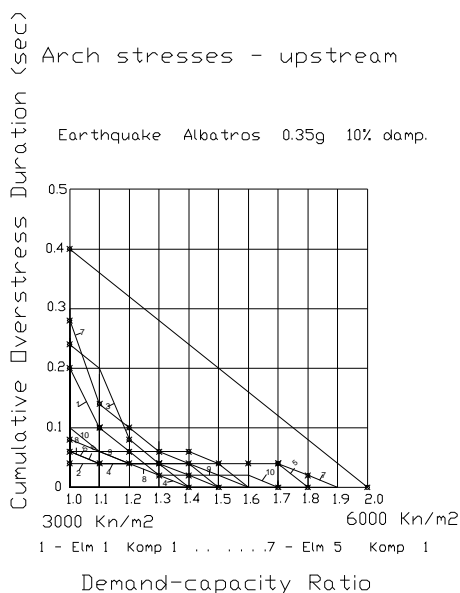
This analysis is performed on all elements, actually, all points in which is exceeded allowed stress.

From the performed analysis it can be concluded that in every point it appears only one “excursion” of exceeding, while the section works on compression and bending, that is, on the opposite side the stress is compressive.

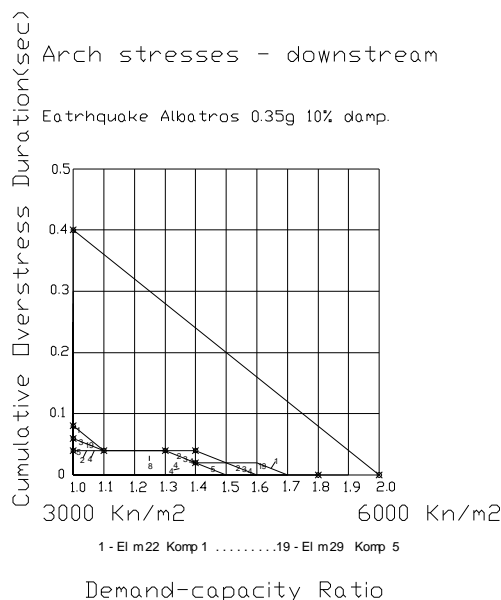
For the dam “Sv. Petka” are constructed two diagrams of cumulative exceeding in all points of upstream and downstream face of the dam in which tensile strength of the concrete is exceeded. They show big distance from the straight line that separates acceptance of linear elastic theory from necessity of conducting non-linear analysis (the line is defined with tensile strength of plane concrete with limiting demand capacity ratio to  $2\frac{\sigma}{f_t}$  - X axis and cumulative duration of 0.4 sec -Y axis).

From these diagrams it can be noticed that conducted linear elastic analysis give very small damages even during earthquake Z2 (Albatros with PGA=0.35g and 10% damping). It should be mentioned that these results refer only to the period of the year when the temperature in the concrete have minimal value (winter conditions - the most unfavourable conditions).

Upper third of the body of the dam is provided with the face reinforcement with ribbed bar RA 400/500-2.



Slika 7. Kriterijum oštećenja. Naponi u lukovima – zemljotres Albatros, 0,35g, prigušenje 10%  
Fig. 7. Damage criteria. Arch stresses - US Earthquake Albatros 0.35g 10% damp.



Slika 8. Kriterijum oštećenja. Naponi u lukovima – zemljotres Albatros, 0,35g, prigušenje 10%  
Fig. 8. Damage criteria. Arch stresses - DS Earthquake Albatros 0.35g 10% damp.

## 10 OPŠTI ZAKLJUČCI U VEZI SA STANJEM NAPONA I DEFORMACIJA BRANE „SV. PETKA”

Na osnovu sprovedenih proračuna ponašanja brane „Sv. Petka” u odnosu na statičke i dinamičke uticaje, može se zaključiti sledeće:

1. U svim tačkama i u svim ispitanim kombinacijama statičkog opterećenja, naponi zatezanja i pritiska nalaze se u okvirima dozvoljenih granica.

Treba naglasiti da zbog primarnih opterećenja (sopstvena težina + hidrostatički pritisak – na 357,3 m nadmorske visine) celokupna brana praktično se nalazi pod pritiskom, dok su naponi zatezanja beznačajni.

U letnjim uslovima, glavni naponi zatezanja su niskog intenziteta i iznose maksimum +650 kN/m<sup>2</sup>. U zimskim uslovima, na dodirnoj površini između brane i osnove, ti naponi iznose do +1380 kN/m<sup>2</sup>, što je upola manje od dozvoljenog.

Najveća vrednost glavnog napona pritiska iznosi do -2560 kN/m<sup>2</sup>, što je skoro trostruko manje od dozvoljene vrednosti.

Maksimalno rezultirajuće pomeranje brane, pri normalnom nivou vode u akumulaciji, u letnjim uslovima iznosi 4.5 mm uzvodno, a u zimskim – 10,3 mm nizvodno.

2. Spektralna analiza, sprovedena kao preliminarni proračun, ukazuje na potrebu za implementacijom metodologije posmatranja ponašanja brane tokom vremenske istorije ubrzanja registrovanih zemljotresa (*Albatros*, *Robić* i *El Centro*).

Ti zemljotresi skalirani su sa  $a_{maks}=0,25g$  i 5% prigušenja (zemljotres Z1) i  $a_{maks}(g)=0,35g$  i 10% prigušenja (zemljotres Z2).

Najveći naponi zatezanja u lukovima od statičkog opterećenja i zemljotresa Z1 javljaju se u najvišem delu brane, posebno u dodirnoj površini brane i osnove, što je u skladu sa uticajem mikroregiona na numeričku proceduru. Prekoračenje dozvoljenog napona zatezanja javlja se samo kao reakcija na zemljotres *Albatros*, i to u šest tačaka sa uzvodne strane (većina tih napona javlja se iznad normalnog nivoa vode u akumulaciji). Ovo stanje javlja se samo tokom minimalne zimske temperature. Kada je reč o ostala dva analizirana zemljotresa (*Robić* i *El Centro*), nema prekoračenja dozvoljenog napona zatezanja.

Lokacije i magnitude prekoračenja dozvoljenog napona zatezanja su takve da ni u jednom slučaju ne ugrožavaju operativne uslove brane u uslovima zemljotresa Z1 ( $a_{maks}=0,25g$  i 5% prigušenje), pa se ne očekuje bilo kakvo oštećenje.

Najveći naponi zatezanja u lukovima od statičkih opterećenja i zemljotresa Z2 javljaju se u najvišem delu vrha brane, posebno u dodirnoj površini brane i osnove, kao i u trećini krune. Prekoračenje dozvoljenog napona zatezanja javlja se samo u uslovima zemljotresa *Albatros*, u sedam elemenata sa uzvodne i devet elemenata s nizvodne strane brane. Treba naglasiti da se sva prekoračenja javljaju samo uz jednu ekskurziju. Većina ovih tačaka nalazi se iznad normalnog nivoa vode u akumulaciji, konkretno sa suve strane brane. Kada su u pitanju ostala dva zemljotresa (*Robić* i *El Centro* sa  $a_{maks}=0,35g$  i 10% prigušenje), nema prekoračenja dozvoljenog napona zatezanja.

Lokacije, raspored i vrednosti prekoračenja

## 10 GENERAL CONCLUSIONS IN A RELATION OF STRESS AND DEFORMATION CONDITIONS OF DAM “SV. PETKA”

As a result of conducted calculations for the response of dam "Sv. Petka" to static and dynamic influences, the following can be concluded:

1. In all points and in all examined combinations of static loads, tensile and compression stresses are in the allowed limits.

It should be emphasized that from primary loads (self-weight + hydrostatic pressure – 357.3 m.a.s.l.) entire dam practically is under pressure, with insignificant tensions.

Principle tensile stresses in summer conditions are with low order of magnitude till +650 kN/m<sup>2</sup>. In winter conditions at the contact dam-foundation they are in the limits till +1380 kN/m<sup>2</sup>, that is more then two times lower value then allowed.

Extreme value of the principal compression stress reaches -2560 kN/m<sup>2</sup> that is almost three times lower then allowed.

Maximum resulting movement of the dam at normal water level in the reservoir in summer conditions measures 4.5 mm upstream, and in winter conditions 10.3 mm downstream.

2. Analysis by spectral theory with provided input parameters (spectra), conducted as preliminary calculation, shows the demand of implementation of methodology of monitoring the response of the dam during time history of accelerations of earthquakes that happened and registered ones (*Albatros*, *Robić* and *El Centro*).

They are scaled with  $a_{maks}(g)=0.25$  and 5% damping (earthquake Z1) and  $a_{maks}(g)=0.35$  and 10% damping (earthquake Z2).

Highest arch tensile stresses from static loads and earthquake Z1 appear in the highest part of the dam, especially in the contact dam-foundation, that is liable to the influence of the shape of micro-region to numeric procedure. Exceed in allowed tensile stress is present only by earthquake *Albatros* in six points on the upstream face and most of them are above normal level of water in the reservoir. This condition appears only during minimum – winter temperature. There is no exceeding of allowed tensile stress with the other two provided earthquakes (*Robić* and *El Centro*).

Locations and the magnitudes of exceeding of the allowed tensile stress are such that in no one case they do not jeopardize operational condition of the dam in earthquake conditions Z1 ( $a_{maks}(g)=0.25$  and 5% damping), and are not expected any damages.

Highest arch tensile stresses from static loads and earthquake Z2 appear in the highest top part of the dam, especially in the contact dam-foundation and in the third of the crown of the dam. Exceeding of allowed tensile stress has only from the influence of the earthquake *Albatros* in seven elements on upstream and nine elements on downstream face of the dam. It emphasizes that all exceeding are only with one excursion. Most of these points are located above the normal level of water in the reservoir, rather, in the dry part of the dam. There is no exceeding of allowed tensile stress with the other two provided earthquakes: *Robić* and *El Centro* with  $a_{maks}(g)=0.35$  and 10% damping.

dozvoljenog napona zatezanja takvi su da se prema proračunima mogu očekivati tek minimalna oštećenja na vršnim krajevima dodirne površine brane i osnove.

3. U svim tačkama u kojima postoje prekoračenja dozvoljenog napona zatezanja, javlja se samo po jedna ekskurzija. Dijagrami kumulativnog prekoračenja napona zatezanja betona ukazuju na veoma mala oštećenja, čak i kada je u pitanju zemljotres Z2 (*Albatros* sa  $PGA = 0,35g$  i 10% prigušenja)

Konstruktivnim armiranjem gornje trećine lica brane površinskom armaturom, sigurnost brane u slučaju zemljotresa biće povećana.

4. Naponsko stanje na obalama je prihvatljivo, a kao takvo procenjeno je i u pogledu kvaliteta stenovite mase profila brane „Sv. Petka”.

5. Kontaktnim i konsolidacionim injektiranjem, zona dodira brane i osnove biće znatno poboljšana.

Naponi pritiska u brani, koji potiču od statičkih i dinamičkih opterećenja, znatno su ispod dozvoljenih vrednosti. Kako je PRITISAK forma rušenja lučnih brana, niske vrednosti napona pritiska predstavljaju još jedan od indikatora visokog stepena bezbednosti koji je uočljiv kod brane „Sv. Petka”.

Locations, layouts and values of exceeding of allowed tensile stress are such that it can be expected only quite minimal damages at the top end part on the contact dam-foundation, following the applied model of calculation.

3. In all points in which there is exceeding of allowed tensile stress it appears only one “excursion”. Diagrams for cumulative exceeding of tensile strength of the concrete show very small damages even during Z2 (*Albatros* with  $PGA=0.35g$  and 10% damp.).

With face reinforcement of the upper third of the dam, its safety during earthquake conditions will be increased.

4. Stress condition in the banks is acceptable and for the quality of rocky mass of the profile of dam Sv. Petka, is evaluated as permissible.

With contact and consolidation grouting, the zone in the contact dam-foundation will remarkably be improved.

5. Compression stresses in the dam from static and dynamic loading are remarkably below allowed. As PRESSURE is form of failure at arch dams, low values of compression stresses are one more indication of remarkable safety that is present at dam “Sv. Petka”.

## 11 LITERATURA REFERENCES

- [1] Arch Dam Design, Manual, Department of the Army, US Army Corps of Engineers, Manual No. 1110-2-2201, 31 May 1994.
- [2] Engineering Guidelines for The Evaluation of Hydropower Projects CHAPTER 11 – ARCH DAMS, Federal Energy Regulatory Commission Division of Dam Safety and Inspections, Washington, DC 20426, October, 1999
- [3] Design of Arch Dams, Design Manual for Concrete Arch Dams United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation, Denver, Colorado, 1977
- [4] Control of Cracking in Mass Concrete Structures, C. L. Townsend, Engineering Monograph No. 34, United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation.
- [5] Finite Element Method in Analysis and Design of Dams, ICOLD, Bulletin 30a, 1987
- [6] The Engineering of Large Dams, Part I and II Henry H. Thomas, John Wiley & Sons, 1976
- [7] Publications from Congress of Yugoslavian Committee for high dams
- [8] Seismicity and Dam Design, ICOLD, Bulletin 46, 1983
- [9] Earthquake behavior of arch dams, Chuhan Zhang, Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing, China (2005 Internet)
- [10] The Evaluation of Dam Safety, Conference Proceeding, ASCE, 1976
- [11] Arch Dams, Embankment Dams, Concrete Gravity Dams, ASCE, 1967
- [12] Basic criteria for designing of arch dam and hydro-power plant “Kozjak”, IZIS, Institute “Jaroslav Cerni”, HEPS, June, 1977.

LUČNA BRANA “SV. PETKA” U R. MAKEDONIJI

Vladimir SIMONCE

Predmet ovog članka je telo lučne brane “Sv. Petka”: geometrija, statičke i dinamičke analize.

Brana “Sv. Petka” je tanka lučna brana dvojne krivine, građevinske visine 64 m i dužine po kruni 115 m. Debljina po kruni 2.0 m i ona je konstantna na ovoj koti, a u osnovi debljina je 10.0 m. Lukovi su konstruisani sa 3 centra. Brana je neprelivna.

Analiziran je odgovor brane na primarna (sopstvena težina i hidrostatički pritisak), sekundarna (temperatura) i izuzetna (zemljotresi) opterećenja.

Dinamički proračun je sproveden spektralnom teorijom (Response Spectrum Analysis) i praćenjem ubrzanja po vremenskoj istoriji (Time-History analysis). Kao input korišćeni su zemljotresi Albatros, Ulcinj, Crna Gora 15.04.1979g magnitudom  $M=7.0$ , Robić, registriran na steni za vreme zemljotresa u Furlaniji – Severna Italija sa magnitudom  $M=6.1$  i El Centro, U.S.A., 1940 g, magnitude  $M=6.1$ . Projektno ubrzanje na nivo osnovne stene za projektni zemljotres Z1 propisano je sa  $a_{max}(g)=0.25$  a za projektni zemljotres Z2 sa  $a_{max}(g)=0.35$ .

U radu su prezentirani i analizirani podaci o odgovoru brane na merodavne kombinacije opterećenja, sa posebnim naglaskom na dinamički odgovor. Komentarisani su rezultati spektralne analize i analize praćenjem ubrzanja korišćene vremenske istorije. Analizirane su sve ekskurzije iznad dozvoljenog naprezanja na zatezanje i konstruisana su dva dijagrama kumulativnih prekoračenja u svim tačkama uzvodnog i nizvodnog lica brane. Na osnovu rezultata sprovedenih proračuna zaključeno je da brana poseduje potrebnu nosivost i sigurnost na statička i dinamička opterećenja.

**Ključne reči:** lučna brana, kriterijumi proračuna, statička analiza, dinamička analiza, kriterijum povredljivosti.

ARCH DAM “SV. PETKA” IN R. MACEDONIA

Vladimir SIMONCE

The subject of this paper is the body of the arch dam “Vs. Petra” in R. Macedonia: geometry, static and dynamic analyses.

The dam “Vs. Petra” is a thin concrete shell dam with double curvature, structural height of 64 m. In the crest the length is 115.00 m, the thickness of the central cantilever is 2 m (constant at that level) and the thickness at the base is 10 m. The arches are constructed from 3 centres. The spillway is detached (Morning Glory Spillway).

The response of the dam on static usual, unusual and extreme loading combinations and dynamic unusual and extreme combinations have been analyzed.

Response spectrum and Time-history analysis is carried out on earthquakes Albatros, Ulcinj, Montenegro 15.04 1979 with magnitude  $M=7.0$ , Robic, earthquake registered in Furlania, North Italy  $M=6.1$  and El Centro, U.S.A. 1940  $M=6.1$ . Design acceleration on basic rock for Operating Basis Earthquake (OBE- Z1) was prescribed as  $a_{max}(g)=0.25$ , and for Maximum Design Earthquake (MDE-Z2)  $a_{max}(g)=0.35$ .

In the paper response of the dam on the static, and especially on dynamic loading combinations is given. Results of Spectral analysis and Time-History analysis are presented. All excursions above tensile strength of concrete are analyzed and two diagrams of performance assessments of upstream and downstream face of the dam are constructed.

The results of the analyses show that the body of the dam has the bearing capacity and the safety coefficients to the static and dynamic input.

**Keywords:** arch dam, design criteria, static analysis, dynamic analysis, damage criteria



# NOVI POLIGONALNI HISTEREZISNI MODEL ZA SIMULIRANJE EFEKTA SUPERELASTIČNOSTI LEGURA SA SVOJSTVOM PAMĆENJA OBLIKA

## NEW POLYGONAL HYSTERETIC MODEL FOR SIMULATION OF SUPERELASTICITY EFFECT OF SHAPE MEMORY ALLOYS

Koce *TODOROV*  
Svetlana *PETKOVSKA ONCEVSKA*

ORIGINALNI NAUČNI RAD  
ORIGINAL SCIENTIFIC PAPER  
UDK: 669.018.27 = 861

### 1 UVOD

Legure koje pamte oblik pripadaju grupi inteligentnih materijala s velikim potencijalom za primenu u inteligentnim konstrukcijama i sistemima [2,11]. Efekti pamćenja oblika i efekat superelastičnosti čine ove materijale različitim od ostalih materijala koji se primenjuju u inženjerskoj praksi. Ovi neuobičajeni makroskopski efekti, koji su rezultat promene kristalne strukture materijala, prouzrokovani su martiniznom i reverzibilnom (povratnom) transformacijom.

Pomenuti makroskopski efekti registrovani su kod legura različitog sastava. Prema svojoj komercijalnoj primeni, legure sa svojstvom pamćenja oblika dele se na tri grupe: legure s komercijalnom primenom i serijskom proizvodnjom (Ni-Ti; Ni-Ti-Cu; Cu-Zn-Al), legure koje su na pragu komercijalne proizvodnje (Cu-Al-Ni; Fe-Mn-Si) i legure koje, pored obavljenih naučnih istraživanja, ispoljavaju određeni potencijal za primenu, ali se karakterišu velikom krutošću odnosno njihova proizvodnja je prilično teška (Ni-Al; Ni-Ti-Zn) [9]. Nikl-titanijumske legure ispoljavaju mnoge prednosti koje doprinose tome da se one najčešće koriste u komercijalne svrhe. Ove legure poseduju sposobnost pamćenja velikog procenta povratnih dilatacija (i do 8%). One su stabilne pri cikličkom tretmanu s termičkim i mehaničkim opterećivanjem, imaju izvanrednu otpornost na koroziju i veliku duktilnost. Legure bakra, u poređenju s nikel-titanijumskim legurama, ispoljavaju manju sposobnost za povratne deformacije (od 4 do 6%) i imaju smanjenu otpornost na koroziju, ali zbog niske cene

### 1 INTRODUCTION

Shape memory alloys belong to the group of intelligent materials with a high potential of application to intelligent structures and systems [2, 11]. The shape memory effect and the effect of super elasticity make these materials different from the remaining materials that are applied in engineering practice. These unusual macroscopic effects are the result of the change of the crystal structure of the material, caused by martensite and reversible transformation.

These macroscopic effects have been observed at different alloys composition. According to their commercial use, shape memory alloys are divided into the three main groups: alloys that are commercially used and produced in assembly line production (Ni-Ti; Ni-Ti-Cu; Cu-Zn-Al), alloys that are on the threshold of commercial production (Cu-Al-Ni; Fe-Mn-Si) and alloys that, according to the performed scientific research, show a certain potential for use but are characterized by either great brittleness or quite difficult production (Ni-Al; Ni-Ti-Zn) [9]. Nickel-titanium alloys exhibit a great number of superior characteristics that contribute to their most frequent commercial use. These alloys have the ability of memorizing a high percentage (even up to 8%) of reversible strains. They are stable under cyclic treatment with thermal and mechanical loads, highly resistant to corrosion and characterise with a great ductility. Copper based alloys compared with the nickel-titanium ones show lower capability regarding reversible strains (4 to 6%) and are less resistant to corrosion, but

---

Asist., mr, Univerzitet Sv. Ćirilo i Metodije, Građevinski fakultet, Skoplje, R. Makedonija, [todorov@gf.ukim.edu.mk](mailto:todorov@gf.ukim.edu.mk)  
Prof. dr, Univerzitet Sv. Ćirilo i Metodije, Građevinski fakultet, Skoplje, R. Makedonija, [once@gf.ukim.edu.mk](mailto:once@gf.ukim.edu.mk)

---

Assistant, M.Sc. University Ss. Cyril and Methodius, Faculty of Civil Engineering, Skopje, R. Macedonia, [todorov@gf.ukim.edu.mk](mailto:todorov@gf.ukim.edu.mk)  
Prof. Dr. University Ss. Cyril and Methodius, Faculty of Civil Engineering, Skopje, R. Macedonia, [once@gf.ukim.edu.mk](mailto:once@gf.ukim.edu.mk)

proizvodnje, konvencionalnog metalurgijskog procesa proizvodnje i širokog opsega transformacijskih temperatura sve više se zamenjuju Ni-Ti legurama za određene primene.

Legure koje pamte oblik predstavljaju relativno novu grupu materijala, čija se primena u građevinarstvu, kao jedne od najkonzervativnijih oblasti u tehnici, postepeno nameće u poslednjih deset godina, uz najnovije spoznaje iz istraživanja u ovoj oblasti [4, 5, 7 i 13]. Jedinstvene karakteristike SMA – kao što su veliki kapacitet prigušenja, mogućnost velikih povratnih napona i dilatacija, sposobnost samocentrisanja i izvanredna otpornost na koroziju – čine ove materijale pogodne za primenu u sistemima pasivnog i aktivnog upravljanja konstrukcija, kao inteligentna sredstva za vezivanje s pobuđivačima, senzorima, kao materijali za prednaprezanje i spoljašnje pritezanje, materijali koji se koriste za sanacije itd.

## 2 OSNOVNA SVOJSTVA LEGURA SA SVOJSTVOM PAMĆENJA OBLIKA

Termin *Shape memory alloys* – SMA objedinjuje grupu metala sa sposobnošću vraćanja na prethodno definisane forme – oblik ili geometrije, kada su izloženi određenom termomehaničkom tretmanu. Na mikronivou, materijal menja mikrostrukturu. Na makronivou, to se odlikava preko dva karakteristična efekta: efekta pamćenja oblika i efekta superelastičnosti. Zavisno od kristalne strukture, legura koje pamti oblik može povratiti zaostale – plastične deformacije ako se posle rasterećenja izlaže procesu zagrevanja (efekat jednosmernog pamćenja oblika) posle resterećenja, ili se može vratiti na prvobitni nedeformisani oblik u procesu opterećenja i rasterećenja, iako je prethodno doživela relativno velike nelinearne deformacije (nekad i do 18%).

### 2.1 Kristalografska struktura i fazna transformacija

Legure koje pamte oblik, u zavisnosti od stanja kristalne strukture, može da se sretne u dve različite stabilne faze: austenitna i martenzitna. Karakteristično, austenitna faza je stabilna na niskim temperaturama i pri niskim naponima, dok je martenzitna faza stabilna na niskim temperaturama i pri visokim naponima. Osim toga, martenzitna faza može se sresti u dve različita varijante: sjedinjene ili razdvojene martenzitne faze (*twinned, detwinned martensite*). S druge strane, austenitna faza zauzima samo jednu formu, uz težnju da postane čvršća i jača. Fazna promena ovih legura dešava se kada se materijal nalazi u čvrstoj fazi, odnosno pri temperaturi koja je znatno niža od tačke topljenja materijala. Iz tog aspekta, fazna transformacija uobičajeno se naziva transformacija od tvrde do tvrde (*solid-to-solid transformation*).

Na relativno visokim temperaturama, legura koja pamti oblik je u austenitnoj fazi, koju karakteriše kubna kristalna struktura, pri čemu svaki atom pamti susedni. Sa hlađenjem, kristalna rešetka se transformiše u sjedinjene martenzitne s monoklinočnom kristalnom strukturom. Promena kristalne strukture iz austenitne u martenzitnu fazu jeste takozvana martenzitna transformacija. Pošto je željeni oblik definisan kada je materijal u austenitnoj fazi, ova faza često se smatra

due to the lower cost of production, the conventional metallurgic process of production and wide range of transformation temperatures, they are increasingly replacing the Ni-Ti alloys in certain applications.

Shape memory alloys represent a relatively new group of materials, whose application in civil engineering, as one of the most conservative engineering fields, has gradually been imposed for the last ten years, following the latest knowledge gained from the investigations in this field [4, 5, 7, and 13]. The unique characteristics of SMA: high damping capacity, high level of stress and strains recovery, re-centring capabilities, and high corrosion resistance make these materials appropriate for application in systems for passive and active structural control, as smart connectors, actuators, sensors, as materials for prestressing and external posttensioning, materials for retrofit applications, etc.

## 2 BASICS OF SHAPE MEMORY ALLOYS

The term shape memory alloys - SMA refers to a group of metallic materials, which have the ability to return to their predefined form, shape or geometry if exposed to an appropriate thermo-mechanical treatment. At micro level, the material changes its crystal lattice. At macro level, this is reflected by two characteristic effects: the shape memory effect and the effect of superelasticity. Depending on the state of the crystal structure, shape memory alloys can recover residual plastic deformations if subjected to a heating process (one-way shape memory effect) after unloading, or can return to the initial shape in the process of loading and unloading despite the previously experienced relatively large (sometimes up to 18%) nonlinear deformations.

### 2.1 Crystallographic structure and phase transformation

Depending on the state of the crystal structure, shape memory alloys can be found in two different stable phases: austenite and martensite. Typically, the austenite phase is stable at high temperatures and low stresses while the martensite phase is stable at low temperatures and under high stresses. Moreover, the martensite phase can be found in two different variants: twinned or detwinned martensite. On the other hand, the austenite phase only takes on a single form and tends to be harder and stronger. Phase transformation of these alloys occurs at solid state of the material, i.e., at a temperature, which is quite lower than the melting point of the material. For this reason, phase transformation is usually called solid-to-solid transformation.

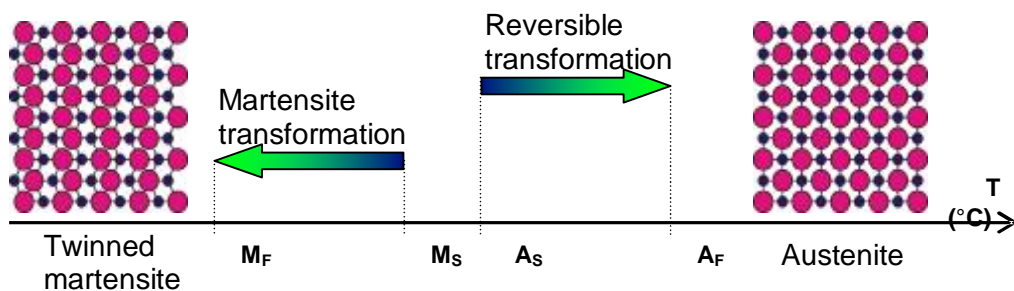
At relatively high temperatures, a shape memory alloy is in its austenite phase, characterized by a cubic crystal structure, whereat each atom remembers its neighbour. With cooling, the crystal lattice is transformed into twinned martensite with monoclinic crystal structure. The change of the crystal structure from austenite to martensite phase is called martensite transformation. Since the desired shape is defined when the material is in the austenite phase, this phase is often referred to as the natural stage. The transformation from austenite to martensite phase occurs through a displacive process,

prirodnim stanjem. Transformacija austenitne u martenzitnu fazu javlja se zbog proklizavanja koje ipak ne podrazumeva makroskopske promene oblika uzorka (9).

Martenzitna transformacija može biti uzrokovana promenom temperature (hlađenje), ili nanošenjem spoljašnjeg opterećenja (promena unutrašnjih napona). Ako se posle završetka martenzitne transformacije poveća temperatura, martenzitna faza postaje nestabilna. Ova pojava rezultira vraćanjem kristalne rešetke u prirodnu fazu, odnosno u originalnu konfiguraciju. To se naziva reverzibilna (povratna) transformacija. (sl.1).

which does not imply, however, macroscopic changes in the shape of the specimen [9].

Martensite transformation can be induced by the change of temperature (cooling) or application of an external load (change of internal stresses). If there is a temperature increase after the completion of the martensite transformation, the martensite phase becomes unstable. This results in the return of crystal lattice into its natural phase, i.e. original configuration. This process is called reversible transformation, Fig.1.



Slika 1. Šematski prikaz martenzitne i reverzibilne transformacije  
Figure 1. Schematic presentation of martensite and reversible transformation

Legura koja pamti oblik u nenapregnutom stanju, karakteriše se sa četiri temperature transformacije: temperatura početka martenzitne transformacije  $M_s$  (struktura materijala počinje da se transformiše iz austenitne u martenzitnu fazu), temperatura na kraju martenzitne transformacije  $M_f$  (celokupna struktura se nalazi u martenzitnoj fazi), temperatura početka reverzibilne transformacije  $A_s$  (struktura materijala počinje da se transformiše iz martenzitne u austenitnu fazu) i temperatura na kraju reverzibilne transformacije  $A_f$  (cela struktura je u austenitnoj fazi).

Temperatura transformacije, koja može biti u prilično širokom opsegu, pretežno zavisi od sastava (kompozicije) i proizvodnje legure, ali može biti zavisna i od drugih faktora kao što su atomski red, unutrašnji naponi, defekti u kristalnoj rešetki, itd.

## 2.2 Termomehaničko ponašanje

Kao rezultat termoelastične martenzitne transformacije, zavisnost napon–dilatacija kod legura s pomćenjem oblika jeste nelinearna. Pored toga, ona je histerezisna i s velikim kapacitetom povratnih nelinearnih deformacija. Na makroskopskom nivou, transformacija kristalne strukture, kao mikroskopska pojava, ispoljava se preko dva efekta, koji su karakteristični samo za materijale koji pamte oblik. To su efekat superelastičnosti i efekat pamćenja oblika.

### 2.2.1 Efekat superelastičnosti

Efekat superelastičnosti se javlja ako se kristalna struktura materijala nalazi u austenitnoj fazi. Martenzitna transformacija može biti inicirana ili promenom

In a stress-free state, a SMA is characterized by four transformation temperatures: the temperatures at the start of the martensite transformation  $M_s$ , (the material structure starts to transform from austenite to martensite), the temperatures at the completion of the martensite transformation  $M_f$  (the whole structure is in the martensite phase), the temperature at the start of the reversible transformation  $A_s$  (the material structure starts to transform from martensite to austenite) and the temperatures at the completion of the reversible transformation  $A_f$  (the whole structure is in the austenite phase).

The temperatures of transformation, that can range quite widely, mainly depend on the composition and processing of the alloy, but also on other factors such as the atomic order, internal stresses, defects in crystal lattice, etc.

## 2.2 Thermo-mechanical behaviour

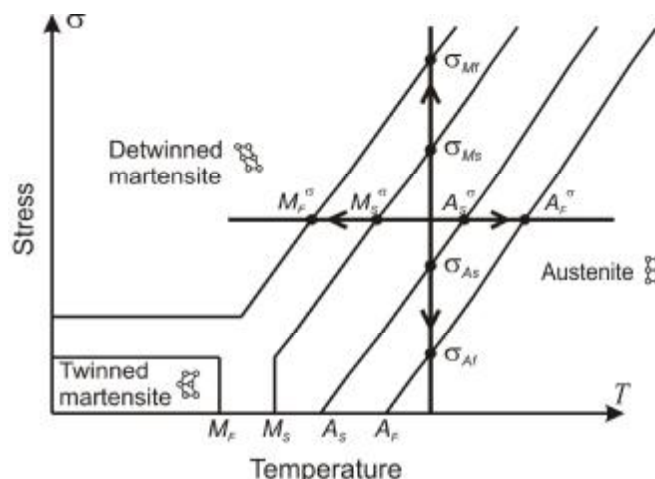
As a result of the thermo-elastic martensite transformation, the stress-strain relationship of shape memory alloys is nonlinear, hysteretic and with a great ability for reversible nonlinear deformations. At macroscopic level, the transformation of the crystal structure as a microscopic phenomenon is reflected through two effects that characterize shape memory materials. These are: effect of superelasticity and the shape memory effect.

### 2.2.1 Effect of superelasticity

The superelastic effect takes place when the crystal structure of the material is in the austenite phase. The

unutrašnjih napona pri konstantnoj temperaturi (izotermalni proces), ili s promenom temperature za konstantan nivo unutrašnjeg naprezanja (izobarni proces), što je prikazano na sl. 2.

martensite transformation can be initiated either by the change of internal stresses at constant temperature (isothermal process) or by the change of temperature at constant level of internal stresses (isobaric process), Fig. 2.



Slika 2. Šematski prikaz faze promena za izobarnu i izotermalnu martenzitnu transformaciju  
Figure 2. Schematic presentation of phase change at isobaric and isothermal martensite transformation

U izotermalnom procesu, martenzitna transformacija počinje u momentu kada intenzitet spoljašnjih napona dostigne vrednost  $\sigma_{Ms}$ , a kompletno se završava s naprezanjem  $\sigma_{Mf}$ . Za ovakvu transformaciju, struktura materijala prelazi u razdvojenu (*detwined*) martenzitnu varijaciju. Ukoliko se u ovom stanju materijal rasterećuje, za napon  $\sigma_{As}$  počinje transformacija iz martenzitne u austenitnu fazu koja se završava pri naponu  $\sigma_{Af}$ . Za kompletno rasterećenje materijala, zbog promena unutrašnje strukture gube se sve deformacije koje su se dogodile – materijal se vraća u početno, nedeformisano stanje. Zavisnost napon-dilatacija za superelastično ponašanje aksijalno napregnutog elementa u austenitnoj fazi, prikazana je na sl. 3. a.

U procesu opterećivanja i rasterećenja, zbog razlike između napona  $\sigma_{Mf}$  i  $\sigma_{As}$ , kao i između napona  $\sigma_{Ms}$  i  $\sigma_{Af}$ , nivo napona pri prelasku iz martenzitne u austenitnu fazu ( $\sigma_{As} \rightarrow \sigma_{Af}$ ) manji je od nivoa napona koji odgovaraju prelasku iz austenitne u martenzitnu fazu ( $\sigma_{Ms} \rightarrow \sigma_{Mf}$ ), pri čemu se javlja razlika u deformacijama energije za opterećivanje i rasterećivanje. Ova dovodi do formiranja histerezisnog efekta u kojem se disipira određena količina ulazne energije bez pojava zaostalih plastičnih deformacija. Intenzitet temperature pri opterećenju i rasterećenju utiče na intenzitet napona transformacije, međutim, forma histerezisnih petlji u principu se ne menja.

Efekat superelastičnosti može biti prouzrokovan promenom unutrašnje temperature materijala za konstantni nivo unutrašnjih napona. Ukoliko se materijal nalazi u austenitnoj fazi i izloži se konstantnom naponu, manjem od napona na početku martenzitne transformacije, tada će se on još uvek nalaziti u austenitnoj fazi. Ako u ovom stanju počne smanjivanje temperature, u stanju kada unutrašnja temperatura dostigne vrednost  $M_s^\sigma$ , dolazi do termički inicirane

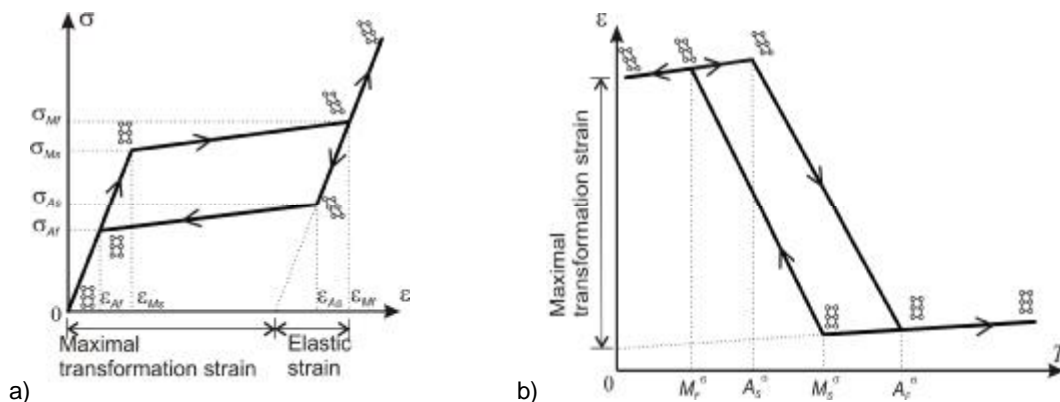
In an isothermal process, the martensite transformation starts at the moment when the intensity of internal stresses reaches the value of  $\sigma_{Ms}$ , and is completely finished at stress  $\sigma_{Mf}$ . At such transformation, the structure of the material gets into detwinned martensite variation. If, in this state, the material is unloaded, at stress  $\sigma_{As}$ , there starts the transformation from martensite to austenite phase that ends at stress  $\sigma_{Af}$ . At complete unloading of the material, due to the change of the inner structure, all the experienced deformations are lost and the material returns to the initial non-deformed state. The stress-strain relationship during superelastic behaviour of an axially loaded element in the austenite phase is shown in Fig. 3a.

In the process of loading and unloading, due to the difference between stresses  $\sigma_{Mf}$  and  $\sigma_{As}$ , as well as between stresses  $\sigma_{Ms}$  and  $\sigma_{Af}$ , the level of stress at the transition from the martensite to the austenite phase ( $\sigma_{As} \rightarrow \sigma_{Af}$ ) is lower than the stress level at the transition from the austenite to the martensite phase ( $\sigma_{Ms} \rightarrow \sigma_{Mf}$ ), whereat there occurs a difference in the deformation energy for loading and unloading. This leads to a hysteretic effect during which a certain quantity of input energy is dissipated without occurrence of residual plastic deformations. The temperature intensity at loading and unloading has an influence upon the intensity of the transformation stresses; however the form of the hysteretic loop does not change, in principle.

The effect of superelasticity can also be caused by the change of the inner temperature of material at constant level of internal stresses. If the material is in the austenite phase and is exposed to constant stress, which is lower than the stress at the beginning of the martensite transformation, then it will still be in the austenite phase. If in this state, there starts a decrease in temperature, a thermally initiated martensite

martenzitne transformacije. Martenzitna transformacija i u tom slučaju karakteriše se razvojem velikih makroskopskih dilatacija transformacija, čiji razvoj se završava kada temperatura dostigne vrednost  $M_F^\sigma$ . Kasnije hlađenje na temperaturama nižim od temperature na kraju martenzitne transformacije, dovodi samo do pojave termoelastičnih dilatacija skupljanja, proporcionalnih koeficijentu linearnog širenja/skupljanja materijala u martenzitnoj fazi. Dilatacije transformacije nekoliko desetina puta su veće od termoelastičnih deformacija za istu temperaturnu razliku. Za povećanje temperature, dok dostigne temperaturu početka reverzibilne transformacije  $A_S^\sigma$ , nastaju termoelastične dilatacije širenja. Posle prekoračenja ovih temperatura, počinje proces reverzibilne transformacije koja se reflektuje razvojem transformacionih dilatacija skupljanja koje se završavaju na temperaturi  $A_F^\sigma$  (sl. 3.b).

transformation will take place in conditions when the inner temperature reaches the value of  $M_S^\sigma$ . Also in this case, the martensite transformation is characterized by the development of large macroscopic deformation strains, whose development ends when the temperature reaches the value of  $M_F^\sigma$ . Further cooling temperatures lower than the temperature at the end of the martensite transformation leads only to occurrence of thermo-elastic shrinkage strains that are proportional to the coefficient of linear spreading/shrinkage of the material in the martensite phase. The transformation strains are several tens of times higher than the thermo-elastic deformations for the same temperature difference. At increase of temperature up to the achievement of the temperature at the beginning of the reversible transformations  $A_S^\sigma$ , thermo-elastic expansion strains take place. After the exceeding of such temperature, there starts the process of reversible transformation, which is reflected through the development of transformation shrinkage strains that end at temperature of  $A_F^\sigma$ , Fig. 3.b.



Slika 3. Karakteristični dijagrami: a) napon-dilatacija za izotermalni i b) dilatacija-temperatura za izobarni proces superelastičog ponašanja

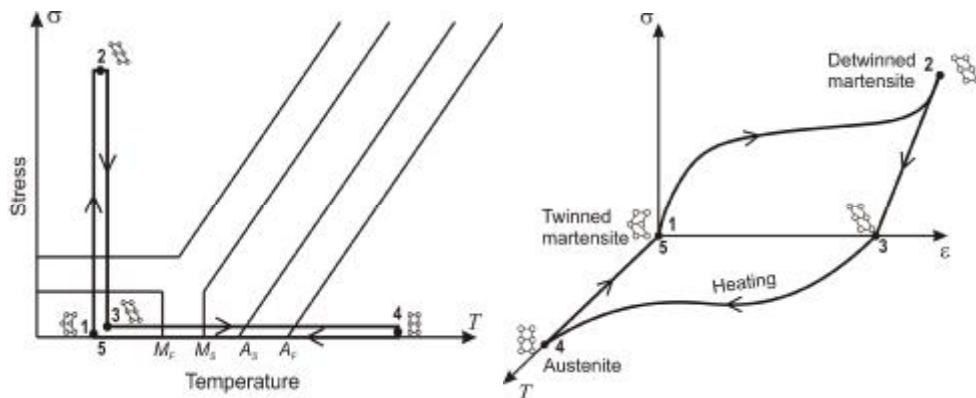
Figure 3. Characteristic diagrams: a) stress-strain at isothermal process and, b) strain-temperature at isobaric process of superelastic behavior

### 2.2.2 Efekat promene oblika

Efekat promene oblika se javlja kada se materijal na radnoj temperaturi nalazi u martenzitnoj fazi. Ukoliko se u ovom stanju on napregne do određenog nivoa, slično kao i kod ostalih duktilnih materijala, dolazi do pojave plastičnih deformacija koje ostaju i posle kompletnog rasterećenja. Karakteristično za legure s pamćenjem oblika jeste to što ukoliko se u ovako deformiranom nenepregnutom stanju materijal izlaže termičkom tretmanu s povećanjem temperature, menja se njegova unutrašnja struktura i iz martenzitne prelazi u austenitnu fazu. Ovaj prelaz karakteriše se potpunom reverzibilnošću (povratnošću) zaostalih plastičnih deformacija, koja se zadržava i posle ponovnog hlađenja, odnosno transformacije iz austenitne u martenzitnu fazu (sl. 4). Proces pri kojem materijal pamti svoju prirodnu formu u austenitnoj fazi poznat je kako jednosmeran efekat pamćenja oblika.

### 2.2.2 Shape memory effect

The shape memory effect takes place when the material is in the martensite phase under working temperature. If, in this state, it is stressed to a certain level, similar to the remaining ductile materials, the material suffers plastic deformations that remain even after complete unloading. For the shape memory alloys, it is characteristic that, if in such deformed non-stressed state, the material is exposed to thermal treatment by increase of temperature, its inner structure changes from martensite to austenite phase. Such transition is characterized by complete reversibility of the residual plastic deformations, which is maintained also after re-cooling, i.e., transition from austenite to martensite phase, Fig. 4. The process during which the material memorizes its natural form in the austenite phase is referred to as one-way shape memory effect.



Slika 4. Fazna promena i karakteristični dijagram napon–dilatacija pri pojavi efekta pamćenja oblika  
 Figure 4. Phase change and characteristic stress-strain diagram at the occurrence of shape memory effect

Uzrok pojave efekta pamćenja oblika jeste termoelastična martenzitna transformacija kristalne strukture. Naime, pri smanjenju temperature, kristalna struktura transformiše se iz austenitne (prirodne faze) u spregnutu (*twined*), martenzitnu fazu, pri čemu se na makroskopskom nivou u materijalu ne beleže nikakve značajne promene. S mikroskopskog gledišta, pri martenzitnoj transformaciji, slobodne površine materijala formiraju fine reljefne strukture. Ukoliko se pri ovakvom stanju materijal deformiše (zatezanje, pritisak, savijanje, torzija), kristalna struktura prelazi u razdvojenu (*detwined*) martenzitnu varijaciju i kod materijala se javlja vidljiva deformacija koja ostaje i posle prestanka dejstva spoljašnjeg opterećenja.

### 3 POLIGONALNI HISTEREZISNI MODEL ZA SIMULIRANJE EFEKTA SUPERELASTIČNOSTI

Važan preduslov za uvođenje legura sa svojstvom pamćenja oblika u proces projektovanja jeste razvoj konstitutivnih modela kojima se reprodukuje složeno makroskopsko ponašanje materijala. Iako se u literaturi mogu pronaći brojni materijalni modeli kojima se uspešno simulira ponašanje legura koje pamte oblik pri dejstvu cikličnog opterećenja [1, 3, 10], deo njih može biti dosta složen i težak za implementaciju u postojeće kompjuterske kodove. S tim ciljem, razvijen je novi histerezisni model za opisivanje efekata superelastičnosti pri cikličnom aksijalnom opterećenju [12]. Saglasno svojoj prirodi, ovaj model svrstava se u grupu poligonalnih histerezisnih modela s promenljivom tangentnom krutošću.

Definisani model omogućuje zadovoljavajuće simulacije procesa cikličnog opterećenja i rasterećenja zategnutog elementa. U modelu je pretpostavljeno da je negativna grana, kojom se definiše ponašanje na pritisak, simetrična s pozitivnom, pri čemu se za njeno opisivanje koriste iste materijalne konstante. Ukoliko se eksperimentalnim ispitivanjem pokaže da su karakteristične vrednosti na pritisak različite od vrednosti pri zatezanju, moguće je definisanje asimetrične histerezisne petlje uz primenu istih konstitutivnih relacija. Naravno, s tim ciljem potrebno je definisanje sedam novih materijalnih konstanti koje važe za pritisnuti deo.

The reason for the occurrence of the shape memory effect is in the thermo-elastic martensite transformation of the crystal structure. Namely, in the case of the decrease of temperature, the crystal structure is transformed from austenite (natural phase) to „twinned“ martensite phase, whereat the material does not suffer any significant change at macroscopic level. From microscopic viewpoint, during the martensite transformation, a fine relief structure is formed on the free surface of the material. If in such state, the material is deformed (tension, compression, bending, torsion), the crystal structure passes over to a „detwinned“ martensite variation whereat the material undergoes visible deformations that remain even after termination of the external load effect.

### 3 POLYGONAL HYSTERETIC MODEL FOR SIMULATION OF SUPERELASTICITY EFFECT

An important prerequisite for the introduction of shape memory alloys in the design process is the development of constitutive models able to reproduce the complex material macroscopic behaviour. Although in literature there are a large number of material models that successfully simulate the behaviour of shape memory alloys under the effect of cyclic loads [1, 3, 10], some of them can be quite complex and difficult for implementation in the existing computer codes. For that purpose, a new hysteretic model has been developed to describe the superelasticity effect under cyclic axial loads [12]. According to its nature, this model belongs to the group of polygonal hysteretic models with variable tangent stiffness.

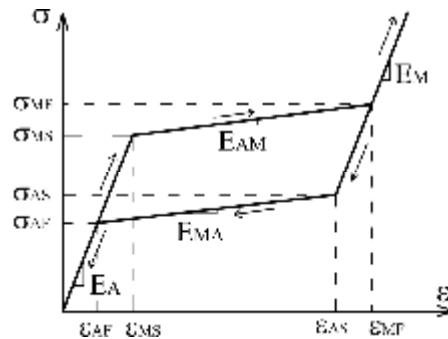
The defined model enables a satisfying simulation of the process of cyclic loading and unloading of tensile elements. In the model, it is assumed that the negative branch, which defines the behaviour under compression, is symmetrical with the positive one, whereat the same material constants are used for its description. If the corresponding experimental investigation proves that the characteristic values under compression are different from the values under tension, it is possible to define an asymmetric hysteretic loop by application of the same constitutive laws. Certainly, for that purpose, it will be necessary to define seven new material constants that will hold for the part referring to compression.

### 3.1 Definicija materijalnih modela

Opisivanje zavisnosti napon–dilatacija u predloženom materijalnom modelu zasniva se na sedam materijalnih konstanti, dobijenih eksperimentalnim ispitivanjem (sl. 5).

### 3.1 Definition of material model

The description of the stress-strain relationship in the proposed material model is based on material constants obtained by experimental tests, Fig. 5.



Slika 5. Zavisnost napon–dilatacija pri superelastičnom ponašanju  
Figure 5. Stress-strain relationship at superelastic behaviour

Ulazni parametri za definisanje materijalnih modela jesu dva karakteristična modula elastičnosti u austenitnoj i martenzitnoj fazi  $E_A$  i  $E_M$ , četiri transformaciona napona: napon na početku i na kraju martenzitne transformacije  $\sigma_{MS}$  i  $\sigma_{MF}$ , naponi na početku i na kraju austenitne transformacije  $\sigma_{AS}$  i  $\sigma_{AF}$ , i dilatacije pri kraju martenzitne transformacije  $\epsilon_{MF}$ .

Ostali parametri potrebni za difinisanje zavisnosti napon–dilatacija, modul transformacije, dilatacije na početku martenzitne i reverzibilne transformacije i dilatacije na kraju austenitne transformacije, mogu se izračunati pomoću prethodno definisanih konstanti:

Input parameters for definition of the material model are the two characteristic modulus of elasticity in the austenite and martensite phase  $E_A$  and  $E_M$ , the four transformation stresses: the stresses at the beginning and at the end of the martensite transformation  $\sigma_{MS}$  and  $\sigma_{MF}$ , the stresses at the beginning and at the end of the austenite transformation  $\sigma_{AS}$  and  $\sigma_{AF}$ , and the strain at the end of the martensite transformation  $\epsilon_{MF}$ .

The remaining parameters that are necessary for definition of the stress-strain relationship, the modulus of transformation, the strains at the beginning of the martensite and reversible transformation and the strain at the end of the austenite transformation, can be computed by means of the previously defined constants:

$$E_{AM} = \frac{S_{MF} - S_{MS}}{e_{MF} - e_{MS}}; \quad E_{MA} = \frac{S_{AS} - S_{AF}}{e_{AS} - e_{AF}} \quad (1)$$

$$e_{MS} = \frac{S_{MS}}{E_A}; \quad e_{AS} = e_{MF} - \frac{S_{MF} - S_{AS}}{E_M}; \quad e_{AF} = \frac{S_{AF}}{E_A} \quad (2)$$

Veza između napona i dilatacija u predloženom modelu definisana je promenom tangentskog modula elastičnosti za postupak cikličnog opterećivanja s kontrolom deformacija. To podrazumeva da je istorija promene dilatacija poznata, a potrebno je da se dobije istorija promene napona. Prirast dilatacija jednak je razlici dilatacija dva susedna koraka.

The stress-strain relationship in the proposed model is defined by the variation of the tangential modulus of elasticity for the procedure of cyclic loading at control of deformations. This means that the history of variation of strains is known and it is necessary to obtain the history of variation of stresses. The increase of strains is equal to the difference of strains in two successive steps.

$$De = e_i - e_{i-1} \quad (3)$$

Ako je ova vrednost pozitivna, registruje se opterećivanje, dok se u suprotnom registruje – rasterećivanje.

If this value is positive, a loading process occurs. In the opposite case, there is an unloading process.

Prirast napona dobija se kao proizvod tangentskog modula elastičnosti i prirasta dilatacija, dok će se vrednost napona dobiti ukoliko se na prethodnu vrednost napona doda proračunati prirast:

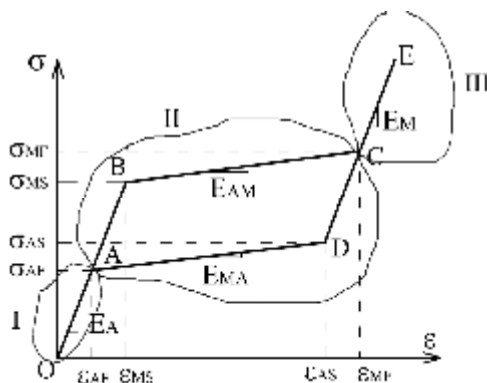
The increase of stresses is obtained as a product of the tangential modulus of elasticity and the strain increase, while the stress value is obtained by adding the computed increase to the previous stress value.

$$Ds = E_T \times De \quad (4)$$

$$s_i = s_{i-1} + Ds \quad (5)$$

Na taj način, problem opisivanja zavisnosti napon–dilatacija svodi se na određivanje trenutnog tangentskog modula elastičnosti. Radi njegovog lakšeg definisanja, zavisnost napon–dilatacija podeljena je na tri grane (sl. 6), pri čemu je tangentska krutost svakog od njih definisana odgovarajućim relacijama.

Thus, the problem of describing the stress-strain relationship is reduced to defining the current tangential modulus of elasticity. Due to its easier definition, the stress-strain relationship is divided into three branches, Fig. 6, whereat the tangent stiffness of each of these is defined by corresponding relationships.



Slika 6. Karakteristične grane zavisnosti napon–dilatacija  
Figure 6. Characteristic branches of the stress-strain relationship

Deo I (O÷A) definiše stanje napona i dilatacija kada se materijal nalazi u potpunoj austenitnoj fazi –  $e < e_{AF}$ . Za ovaj deo, pri opterećenju i rasterećenju, tangentski modul jednak je austenitnom modulu elastičnosti –  $E_T = E_A$ .

Deo II (A÷B÷C÷D) predstavlja glavnu histerezisnu petlju, pri čemu se vrednost dilatacija nalazi u području između dilatacija na kraju austenitne faze i dilatacija na kraju martenzitne faze, tj. –  $e_{AF} < e < e_{MF}$ . Pri potpunom opterećenju i rasterećenju, tangentski modul jednak je modulu karakterističnom za svaku fazu: deo (A÷B),  $E_T = E_A$ ; deo (B÷C),  $E_T = E_{AM}$ ; deo (C÷D),  $E_T = E_M$ ; deo (D÷A),  $E_T = E_{MA}$ .

Ukoliko vrednost dilatacija, pri opterećenju i rasterećenju, prevaziđe vrednost dilatacija na kraju martenzitne transformacije  $e > e_{MF}$ , tada se zavisnost nalazi u delu III, pri čemu je tangentski modul jednak modulu martenzitne faze –  $E_T = E_M$ .

Opisane relacije važe za proces opterećenja i rasterećenja, pri čemu se odvija celokupna martenzitna, tj. celokupna reverzibilna transformacija. Za ovakav proces, vrednosti napona i dilatacija kreću se po granicama glavne histerezisne petlje (O÷B÷C÷E÷D÷A÷O).

Ukoliko pri procesu opterećivanja ne otpočne i rasterećivanje, pre nego što vrednosti dilatacija dostigne vrednost na kraju martenzitne transformacije  $e_{MS} < e < e_{MF}$ , formira se nova tzv. sekundarna histerezisna petlja (sl. 7).

Part I (O÷A), defines the stress-strain state when the material is in complete austenite phase,  $e < e_{AF}$ . For this part, during loading and unloading, the tangential modulus is equal to the austenite modulus of elasticity,  $E_T = E_A$ .

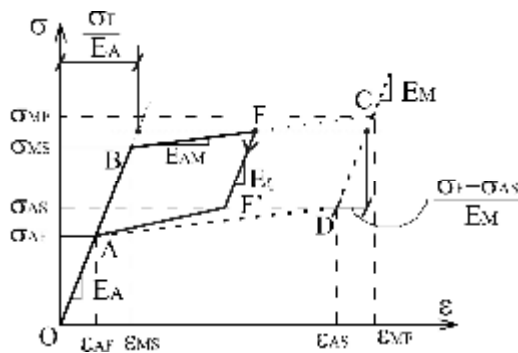
Part II (A÷B÷C÷D) represents the main hysteric loop, whereat the value of the strains is in the range between the strain at the end of the austenite phase and the strain at the end of the martensite phase, i.e.,  $e_{AF} < e < e_{MF}$ . During the complete loading and unloading, the tangential modulus is equal to the modulus characteristic for each phase: part (A÷B),  $E_T = E_A$ ; part (B÷C),  $E_T = E_{AM}$ ; part (C÷D),  $E_T = E_M$ ; part (D÷A),  $E_T = E_{MA}$ .

If the value of the strains during loading and unloading exceeds the value of the strain at the end of the martensite transformation  $e > e_{MF}$ , then the relationship is in part III, whereat the tangential modulus is equal to the modulus in the martensite phase,  $E_T = E_M$ .

The described relationships hold for the process of loading and unloading whereat complete martensite, i.e., complete reversible transformation is performed. For such process, the values of stresses and strains range within the boundaries of the main hysteric loop (O÷B÷C÷E÷D÷A÷O).

If in the process of loading, one starts with unloading prior to reaching the strain value at the end of the martensite transformation,  $e_{MS} < e < e_{MF}$ , a new, the so called secondary hysteric loop is formed, Fig. 7.





Slika 7. Sekundarna histerezisna petlja pri rasterećenju  
Figure 7. Secondary hysteretic loop at unloading

Od početka rasterećenja (tačka F), pa sve dok naponi ne dostignu vrednost na početku austenitne transformacije  $S < S_{AS}$  (tačka F'), tangenti modul može se sračunati kao procentualno učešće austenitnog i martenzitnog modula, u zavisnosti od dostignute vrednosti dilatacija u momentu kada počne rasterećenje.

From the beginning of the process of unloading (point F) until the stresses reach the value at the beginning of the austenite transformation  $S < S_{AS}$  (point F'), the tangential modulus can be computed as percentage of participation of the austenite and martensite modulus, depending on the reached value of strains at the moment of unloading.

$$E_T = E_x = X \times E_M + (1 - X) \times E_A \quad (6)$$

gde je:

where:

$$X = \frac{e_F - \frac{S_F}{E_A}}{e_{AS} + \frac{S_F - S_{AS}}{E_M} - \frac{S_F}{E_A}} ; 0 < X < 1 \quad (7)$$

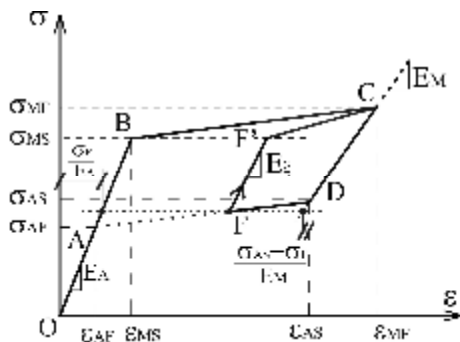
U momentu kada napon  $S = S_{AS}$  otpočne proces reverzibilne transformacije, pri čemu zavisnost  $S, e$  produžava da se kreće po grani F'÷A:

At the moment when stress  $S = S_{AS}$ , there starts the process of reversible transformation whereat relationship  $S \div e$  continues to follow the F'÷A branch:

$$E_T = \frac{S_{F'} - S_{AF}}{e_{F'} - e_{AF}} \quad (8)$$

Slične relacije važe i ukoliko pri rasterećenju, kada se materijal nalazi u delu reverzibilne transformacije (D÷A), za dilatacije  $e_{AF} < e < e_{AS}$ , započinje proces opterećivanja (sl. 8).

Similar relationships hold also if, during the process of unloading, when the material is in the part of reversible transformation (D÷A), there starts the process of loading, Fig. 8.



Slika 8. Sekundarna histerezisna petlja pri opterećenju  
Figure 8. Secondary hysteretic loop at loading

Tangentni modul, od početka opterećivanja (tačka F), pa sve dok naponi ne dostignu vrednost koja se javlja na početku martenzitne transformacije  $S < S_{MS}$  (tačka F'), dobiće se kao kombinacija modula u austenitnoj fazi i modula u martenzitnoj fazi (Eq.6). I u ovom slučaju, učešće martenzitnog dela može se sračunati prema relacijama datim u jednačini 7.

Prilikom opterećivanja, kada naponi dostignu vrednost napona na početku martenzitne transformacije  $S = S_{MS}$  (tačka F'), započinje martenzitna transformacija, pri čemu je tangenta krutost jednaka:

$$E_T = \frac{S_{MF} - S_{F'}}{e_{MF} - e_{F'}} \quad (9)$$

Ova zavisnost važi sve dok dilatacija ne dostigne vrednost koja odgovara kraju martenzitne transformacije  $e = e_{MF}$ , pri čemu materijal počinje da se ponaša u kompletnoj martenzitnoj fazi s tangentnim modulom  $E_T = E_M$ .

### 3.2 Numerička simulacija

Definisani histerezisni model iskorišćen je za simulaciju nekoliko karakterističnih slučajeva cikličnog opterećenja pod dejstvom aksijalnog pritiska i zatezanja. Dobijeni rezultati numeričke simulacije upoređeni su s rezultatima dobijenim iz izvedenih eksperimentalnih ispitivanja, kao i s nekim ostalim materijalnim modelima.

Prvi razmatrani primer predstavlja simulaciju procesa parcijalnog cikličnog opterećenja i potpunog rasterećenja (sl. 9 i 10), pri čemu se vrednosti napona naizmenično menjaju od pritiska u zatezanje, i obratno. Drugi primer predstavlja proces potpunog opterećenja i parcijalnog rasterećenja (sl. 11 i 12), tako što su u prvih sedam ciklusa dilatacije pozitivne (zatezanje), dok su u narednih sedam ciklusa negativne (pritisk). Dobijeni rezultati upoređeni su s numerički dobijenim rezultatima Fugazza [6]. Treći razmatrani primer predstavlja parcijalno opterećenje i parcijalno rasterećenje, pod pritiskom i zatezanjem. Rezultati analize prikazani su s tri karakteristična dijagrama, ulazna istorija dilatacija, proračunata istorija napona i zavisnost napon–dilatacija.

The tangential modulus, from the beginning of loading (point F) until the stresses reach the value at the beginning of the martensite transformation  $s < s_{MS}$  (point F'), will be obtained as a combination of modulus in the austenite phase and modulus in the martensite phase (Eq. 6). Also in this case, the participation of the martensite part can be computed according to the relationship given in Eq.7.

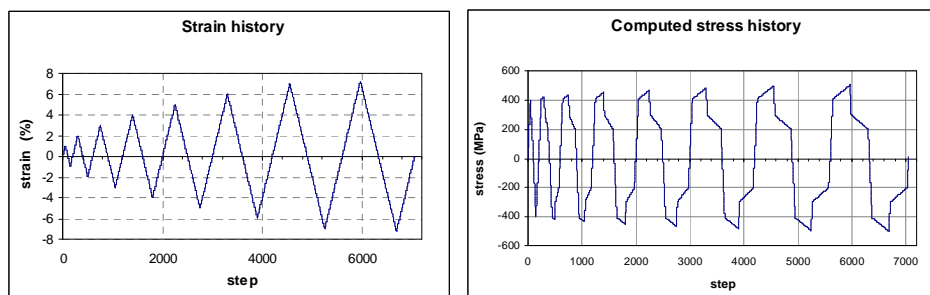
In the process of loading, when the stresses reach the value at the beginning of the martensite transformation  $s = s_{MS}$  (point F'), there starts the martensite transformation, whereat the tangential stiffness is equal to:

This relationship will hold until the strains reach the value corresponding to the end of the martensite transformation  $e = e_{MF}$ , whereat the material starts to behave in complete martensite phase with a tangential modulus  $E_T = E_M$ .

### 3.2 Numerical simulation

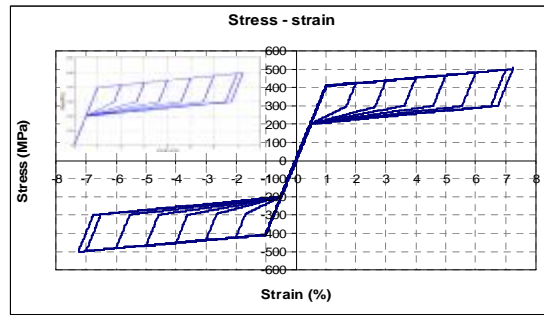
The defined hysteretic model has been used for simulation of several characteristic cases of cyclic loading under the effect of axial compression and tension. The results obtained from the numerical simulation have been compared with the results obtained from performed experimental investigations as well as with some other material models.

The first considered example represents simulation of the process of partial cyclic loading and complete unloading, Fig. 9 and Fig. 10, whereat the values of stresses are alternately changed from compression into tension and vice versa. The second example represents a process of complete loading and partial unloading, Fig. 11 and Fig. 12 so that, in the first 7 cycles, the strains are positive (tension), while in the next 7 cycles, they are negative (compression). The obtained results have been compared with the numerical results obtained by Fugazza [6]. The third considered example represents a process of partial loading and partial unloading under compression and tension. The results from the analysis

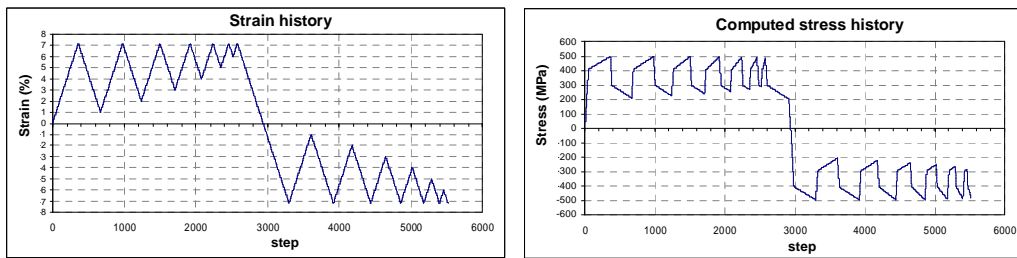


Slika 9. Ulazna istorija dilatacija i sračunata istorija napona u slučaju parcijalnog opterećenja i potpunog rasterećenja, primer 1

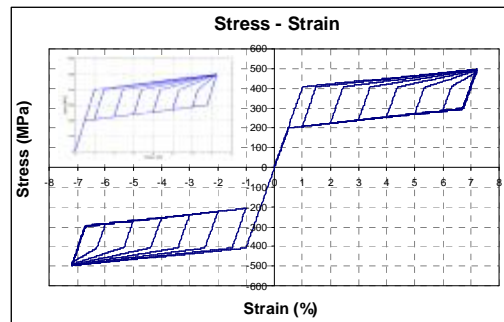
Figure 9. Input history of strains and computed history of stresses in the case of partial loading and complete unloading, Example 1



Slika 10. Sračunata zavisnost napon–dilatacija i poređenje s rezultatima dobijenim u [6], primer 1  
 Figure 10. Computed stress-strain relationship and comparison with the results obtained by Fugazza [6], Example 1



Slika 11. Ulazna istorija dilatacija i sračunata istorija napona za slučaj potpunog opterećenja i parcijalnog rasterećenja, primer 2  
 Figure 11. Input history of strains and computed history of stress in case of complete loading and partial unloading, Example 2



Slika 12. Sračunata zavisnost napon–dilatacija, primer 2, poređenje s rezultatima dobijenim u [6]  
 Figure 12. Computed stress-strain relationship, Example 2, and comparison with the results obtained by Fugazza [6]

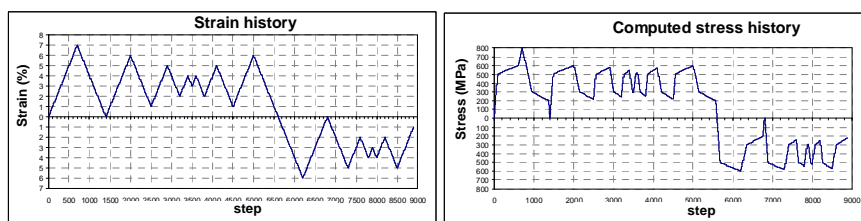
Numerička analiza za prva dva primera sprovedena je za isti modul elastičnosti u austenitnoj i martenzitnoj fazi. Vrednosti materijalnih karakteristika usvojene su prema podacima datim u referenci [6] i iznose:  $E_A=E_M=40000$  MPa,  $\varepsilon_{MF}=7.2\%$ ,  $\sigma_{MS}=500$ MPa,  $\sigma_{MF}=600$ MPa,  $\sigma_{AS}=300$ MPa,  $\sigma_{AF}=200$ MPa.

S ciljem da se prikaže funkcionisanje histerezisnog modela i za materijale s različitim deformacijskim karakteristikama u austenitnoj i martenzitnoj fazi, u trećem primeru usvojeni su različiti moduli elastičnosti za dve karakteristične faze:  $E_A=60000$  MPa,  $E_M=20000$  MPa,  $\varepsilon_{MF}=6\%$ ,  $\sigma_{MS}=500$ MPa,  $\sigma_{MF}=600$ MPa,  $\sigma_{AS}=300$ MPa  $\sigma_{AF}=200$ MPa (sl.13 i 14).

are presented by three characteristic diagrams, input history of strains, computed history of stresses and stress-strain relationship.

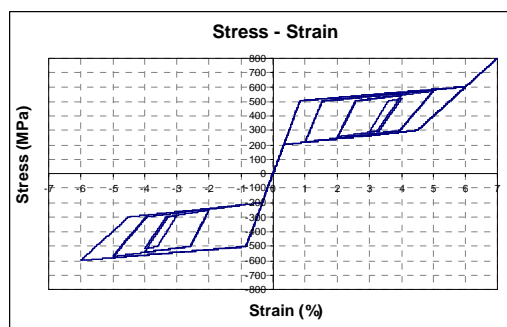
Numerical analysis of the first two examples has been carried out for the same modulus of elasticity in the austenite and martensite phase. The values of the material characteristics have been adopted according to the data given in reference [6] and amount to:  $E_A=E_M=40000$  MPa,  $\varepsilon_{MF}=7.2\%$ ,  $\sigma_{MS}=500$  MPa,  $\sigma_{MF}=600$  MPa,  $\sigma_{AS}=300$  MPa,  $\sigma_{AF}=200$  MPa.

To present the functioning of the hysteretic model also for material with different deformation characteristics in the austenite and martensite phase, in the third example, different modulus of elasticity have been adopted for two characteristic phases:  $E_A=60000$  MPa,  $E_M=20000$  MPa,  $\varepsilon_{MF}=6\%$ ,  $\sigma_{MS}=500$  MPa,  $\sigma_{MF}=600$  MPa,  $\sigma_{AS}=300$  MPa  $\sigma_{AF}=200$  MPa, Fig.13 and Fig.14.



Slika 13. Ulazna istorija dilatacija i sračunata istorija napona u slučaju potpunog opterećenja i parcijalnog rasterećenja, primer 3

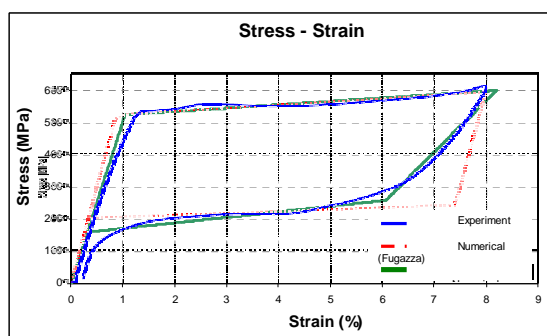
Figure 13. Input history of strains and computed history of stress in the case of partial loading and partial unloading, Example 3



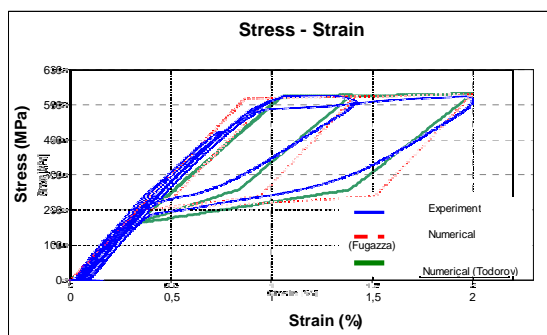
Slika 14. Sračunata zavisnost napon–dilatacija, primer 3  
Figure 14. Computed stress-strain relationship, Example 3

Definisani materijalni model korišćen je za numeričku simulaciju rezultata, dobijenih u eksperimentalnim ispitivanjima nikel-titanijumske žice prečnika 1.49 mm. Materijal je proizvod *Nitinol Devices & Components* [8], dok su rezultati eksperimentalnih i numeričkih testiranja preuzeti iz [6]. Iz analize eksperimentalnih zavisnosti (krive) dobijenih za celokupno opterećenje i rasterećenje, za numeričku simulaciju usvojene su sledeće karakteristike:  $E_A=50000\text{MPa}$ ,  $E_M=16000\text{MPa}$ ,  $\varepsilon_{MF}=8.2\%$ ,  $\sigma_{MS}=520\text{MPa}$ ,  $\sigma_{MF}=600\text{MPa}$ ,  $\sigma_{AS}=260\text{MPa}$ ,  $\sigma_{AF}=160\text{MPa}$ , (sl. 15 i 16).

The defined material model has been used for numerical simulation of the results obtained from the experimental testing of nickel-titanium wires with a diameter of 1.49mm. The material has been produced by *Nitinol Devices & Components* [8], while the results from the experimental and numerical testing are taken from Fugazza [6]. From the analysis of the experimental curve obtained at complete loading and unloading, the following characteristics have been adopted for the numerical simulation:  $E_A=50000\text{ MPa}$ ,  $E_M=16000\text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{MF}=8.2\%$ ,  $\sigma_{MS}=520\text{ MPa}$ ,  $\sigma_{MF}=600\text{ MPa}$ ,  $\sigma_{AS}=260\text{ MPa}$ ,  $\sigma_{AF}=160\text{ MPa}$ , Fig.15 and Fig.16.



Slika 15. Poređenje eksperimentalnih i numerički dobijenih krivâ, pri ukupnom opterećenju i rasterećenju  
Figure 15. Comparison between the experimentally and numerically obtained curve at complete loading and unloading



Slika 16. Poređenje eksperimentalnih i numerički dobijenih krivâ, pri cikličnom opterećenju i rasterećenju  
 Figure 16. Comparison between the experimentally and numerically obtained curve at cyclic loading and unloading

#### 4 ZAKLJUČAK

Legure sa svojstvom pamćenja oblika pripadaju grupi inteligentnih materijala s velikim potencijalom za primenu u inteligentnim konstrukcijama i sistemima. Efekat pamćenja oblika i efekat superelastičnosti stvaraju legure sa svojstvom pamćenja oblika, veoma različite od ostalih materijala koji se primenjuju u inženjerskoj praksi. Neuobičajeni makroskopski efekti koji se manifestuju rezultat su promene kristalne strukture materijala, prouzrokovane martenzitnim i reverzibilnim transformacijama. Fizičko-mehaničke karakteristike legura sa svojstvom pamćenja oblika kreću se u širokim granicama i zavise od kontrole procesa dobijanja tih legura, procentualne zastupljenosti komponenata u legurama, prisustva trećeg elementa i sl.

Predloženi originalni histerezisni model za opisivanje efekata superelastičnosti pri cikličnom aksijalnom opterećivanju svrstava se u grupu poligonalnih histerezisnih modela s promenljivom tangentnom krutošću. Taj model odlikuje niz prednosti, kao što su: jednostavan algoritam za proračun; lako definisanje potrebnih materijalnih parametara pomoću jednoaksijalnog testa na pritisak ili zatezanje; različite elastične karakteristike u austenitnoj i martenzitnoj fazi; mogućnost simulacije različitih uslova opterećivanja pri cikličnom opterećenju; laka implementacija u nekom od otvorenih softverskih kodova.

#### 5 LITERATURA REFERENCES

[1] Auricchio F., Considerations on the Constitutive Modelling of Shape Memory Alloys, Shape Memory Alloys - Advances in Modelling and Applications, 126-188, CIMNE Barcelona, 2001.  
 [2] Boller C., Shape Memory Alloys – Their challenge to contribute to smart structures, Annual meeting of the Materials Research Society, Boston, USA, December 1999.  
 [3] Brinson L. C., Huang M.S., Simplifications and Comparisons of Shape Memory Alloy Constitutive Models, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol.7, January 1996.

#### 4 CONCLUSION

Shape memory alloys belong to the group of intelligent materials of a high potential to be used in intelligent structures and systems. The shape memory effect and superelasticity effect make shape memory alloys different from other materials that are used in engineering practice. The manifested unusual macroscopic effects result from the change of the crystal structure of the material caused by martensite and reversible transformation. The physical-mechanical characteristics of shape memory alloys range widely and depend on the control of the process of their obtaining, the percentage of components presence in the alloy, the presence of third elements and alike.

The proposed original hysteretic model for description of the effect of superelasticity under cyclic axial load belongs to the group of polygonal hysteretic models with variable tangent stiffness. The model has a number of advantages as are the simple algorithm for computation, the easy definition of the necessary material parameters by means of a uniaxial compressive or tension test, the different elastic characteristics in the austenite and martensite phase, the possibility of simulation of different loading conditions at cyclic loading and easy implementation in some of the open software codes.

[4] DesRoches R., Smith B., Shape Memory Alloys in Seismic Resistant Design and Retrofit: A Critical Assessment of the Potential and Limitations, Journal of Earthquake Engineering, Vol 7, No. 3, pp. 1-15, September, 2003.  
 [5] Duerig W. T., Melton N. K., Applications of Shape Memory, Materials Science Forum, Vol. 56-58, 679-692, 1990.  
 [6] Fugazza D., Shape-memory alloy devices in earthquake engineering: Mechanical properties, Constitutive modelling and Numerical simulations, MSc thesis, European school of advanced studies in reduction of seismic risk, ROSE School, September 2003.

- [7] Janke L., Czaderski C., Motavalli M., Ruth J., Applications of shape memory alloys in civil engineering structures - Overview, limits and new ideas, *Materials and Structures* 38, 578-592, June 2005.
- [8] NDC, Nitinol Devices & Components, <http://www.nitinol.com>
- [9] Otsuka K., Wayman C. M., *Shape Memory Materials*, Cambridge University Press, 1999.
- [10] Paiva A., Savi M.A., An Overview of Constitutive Models for Shape Memory Alloys, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID56876, pp.1-30, 2006
- [11] Stalmans R., Van Humbeeck J., *Shape Memory Alloys: Functional and Smart, Smart materials and technologies – sensors, control systems and regulators seminar*, Prague, Czech Republic, October 1995.
- [12] Todorov K., *Application of Shape Memory Alloys in the Systems for Passive Control of Structures, MSc thesis* (in Macedonian), University Ss. Cyril and Methodius, Faculty of Civil Engineering - Skopje, R. Macedonia, 2008.
- [13] Todorov K. and Oncevska S.P., *Commercial Shape Memory Alloys and Their Application in Structural Control, 12 International Symposium on Macedonian Association of Structural Engineers*, Struga, R. Macedonia, Vol.2,599-604, 2007.

## REZIME

### NOVI POLIGONALNI HISTEREZISNI MODEL ZA SIMULIRANJE EFEKTA SUPERELASTIČNOSTI LEGURA SA SVOJSTVOM PAMĆENJA OBLIKA

Koče TODOROV  
Svetlana PETKOVSKA ONCEVSKA

Termin *legure koje pamte oblik* odnosi se na grupu inteligentnih materijala (*Shape memory alloys – SMA*) i objedinjuje grupu metala sa svojstvima vraćanja u prethodno definisanu formu, oblik ili geometriju, kada su izloženi određenom termomehaničkom tretmanu. Jedinствене karakteristike SMA – kao što su: veliki kapacitet prigušenja, mogućnost velikih povratnih napona i dilatacija, samocentrirajuća mogućnost i izvanredna otpornost na koroziju – čine ove materijale pogodnim za primenu u sistemima za pasivno i aktivno upravljanje (control) konstrukcija i za naučna istraživanja. U ovom radu, izložene su opšte karakteristike legura sa svojstvom pamćenja i najvažnije fizičko-mehaničke karakteristike najčešće korišćenih komercijalnih legura.

Definisanje materijalnog modela za numeričku simulaciju superelastičnog odgovora legura koje pamte oblik veoma je značajno za njihovo matematičko modeliranje. S tim ciljem, razvijen je novi, originalni poligonalni histerezisni model s promenljivom tangentnom krutošću, kojom se opisuje efekat superelastičnosti u slučaju cikličnog aksijalnog opterećenja.

Model ima niz prednosti, kao što su: jednostavni algoritam za proračun, lako definisanje potrebnih materijalnih parametara za jednoaksijalan test na pritisak ili zatezanje, različite elastične karakteristike u austenitnoj i martenzitnoj fazi, mogućnost simuliranja različitih uslova za ciklično opterećivanje, laka implementacija u neki od otvorenih softverskih kodova.

**Ključne reči:** legure sa svojstvom pamćenja oblika, superelastičnost, histerezisni model.

## SUMMARY

### NEW POLYGONAL HYSTERETIC MODEL FOR SIMULATION OF SUPERELASTICITY EFFECT OF SHAPE MEMORY ALLOYS

Koče TODOROV  
Svetlana PETKOVSKA ONCEVSKA

The term shape memory alloys (SMA) refers to the group of metallic materials that demonstrate the ability to return to the same predefined shape or size when exposed to an appropriate thermal procedure. The unique characteristics of SMA, i.e., the high damping capacity, the high level of stress and strains recovery, the re-centring capabilities and the high corrosion resistance make this material attractive for scientific research. This paper shows the general characteristics of the shape memory alloys and the main physical-mechanical properties of the most frequently used commercial alloys.

Definition of a material model for numerical simulation of the superelastic response of shape memory alloys is very important for their mathematical modelling. For that purpose, a new original polygonal hysteretic model with variable tangent stiffness has been developed for description of the superelasticity effect in the case of cyclic axial loading

The model has a number of advantages as are the simple algorithm for computation, the easy definition of the necessary material parameters by means of a uniaxial compressive or tension test, the different elastic characteristics in the austenite and martensite phase, the possibility of simulation of different loading conditions at cyclic loading and the easy implementation in some of the open software codes.

**Key words:** shape memory alloys, superelasticity, hysteretic model.

## UPUTSTVO AUTORIMA\*

### Prihvatanje radova i vrste priloga

U časopisu Materijali i konstrukcije štampaće se neobjavljeni radovi ili članci i konferencijska saopštenja sa određenim dopunama ili bez dopuna, prema odluci Redakcionog odbora, a samo izuzetno uz dozvolu prethodnog izdavača prihvaćaju se i objavljeni rad. Vrste priloga autora i saradnika koji će se štampati su: originalni naučni radovi, prethodna saopštenja, pregledni radovi, stručni radovi, konferencijska saopštenja (radovi sa naučno-stručnih skupova), kao i ostali prilozi kao što su: prikazi objekata i iskustava - primeri, diskusije povodom objavljenih radova i pisma uredništvu, prikazi knjiga i zbornika radova, kao i obaveštenja o naučno-stručnim skupovima.

*Originalni naučni rad* je primarni izvor naučnih informacija i novih ideja i saznanja kao rezultat izvornih istraživanja uz primenu adekvatnih naučnih metoda. Dobijeni rezultati se izlažu kratko, jasno i objektivno, ali tako da poznavalac problema može proceniti rezultate eksperimentalnih ili teorijsko numeričkih analiza i tok razmišljanja, tako da se istraživanje može ponoviti i pri tome dobiti iste ili rezultate u okvirima dopuštenih odstupanja, kako se to u radu navodi.

*Prethodno saopštenje* sadrži prva kratka obaveštenja o rezultatima istraživanja ali bez detaljnih objašnjenja, tj. kraće je od originalnog naučnog rada. U ovu kategoriju spadaju i diskusije o objavljenim radovima ako one sadrže naučne doprinose.

*Pregledni rad* je naučni rad koji prikazuje stanje nauke u određenoj oblasti kao plod analize, kritike i komentara i zaključaka publikovanih radova o kojima se daju svi neophodni podaci pregledno i kritički uključujući i sopstvene radove. Navode se sve bibliografske jedinice korišćene u obradi tematike, kao i radovi koji mogu doprineti rezultatima daljih istraživanja. Ukoliko su bibliografski podaci metodski sistematizovani, ali ne i analizirani i raspravljani, takvi pregledni radovi se klasifikuju kao stručni pregledni radovi.

*Stručni rad* predstavlja koristan prilog u kome se iznose poznate spoznaje koje doprinose širenju znanja i prilagođavanja rezultata izvornih istraživanja potrebama teorije i prakse. On sadrži i rezultate razvojnih istraživanja.

*Konferencijsko saopštenje* ili rad sopšten na naučno-stručnom skupu koji mogu biti objavljeni u izvornom obliku ili ih autor, u dogovoru sa redakcijom, bitno preradi i proširi. To mogu biti naučni radovi, naročito ako su sopštenja po pozivu Organizatora skupa ili sadrže originalne rezultate prvi put objavljene, pa ih je korisno uz određene dopune učiniti dostupnim široj stručnoj javnosti. Štampaće se i stručni radovi za koje Redakcioni odbor oceni da su od šireg interesa.

*Ostali prilozi* su prikazi objekata, tj. njihove konstrukcije i iskustava-primeri u građenju i primeni različitih materijala, diskusije povodom objavljenih radova i pisma uredništvu, prikazi knjiga i zbornika radova, kao i obaveštenja o naučno-stručnim skupovima.

Autori uz rukopis predlažu kategorizaciju članka. Svi radovi pre objavljivanja se recenziraju, a o prihvatanju za publikovanje o njihovoj kategoriji konačnu odluku donosi Redakcioni odbor.

Da bi se ubrzao postupak prihvatanja radova za publikovanje, potrebno je da autori uvažavaju Uputstva za pripremu radova koja su navedena u daljem tekstu.

### Uputstva za pripremu rukopisa

Rukopis otkucati jednostrano na listovima A-4 sa marginama od 31 mm (gore i dole) a 20 mm (levo i desno), u Wordu fontom Arial sa 12 pt. Potrebno je uz jednu kopiju svih delova rada i priloga, dostaviti i elektronsku verziju na navedene E-mail adrese, ili na CD-u. Autor je obavezan da čuva jednu kopiju rukopisa kod sebe zbog eventualnog oštećenja ili gubitka rukopisa.

**Od broja 1/2010, prema odluci Upravnog odbora Društva i Redakcionog odbora, radovi sa pozitivnim recenzijama i prihvaćeni za štampu, publikovaće se na srpskom i engleskom jeziku.**

Svaka stranica treba da bude numerisana, a optimalni obim članka na jednom jeziku, je oko 16 stranica (30000 slovnih mesta) uključujući slike, fotografije, tabele i popis literature. Za radove većeg obima potrebna je saglasnost Redakcionog odbora.

Naslov rada treba sa što manje reči (poželjno osam, a najviše do jedanaeset) da opiše sadržaj članka. U naslovu ne koristiti skraćenice ni formule. U radu se iza naslova daju ime i prezime autora, a titule i zvanja, kao i ime institucije u podnožnoj napomeni. Autor za kontakt daje telefone, faks i adresu elektronske pošte, a za ostale autore poštansku adresu.

Uz sažetak (rezime) od oko 150 do 200 reči, na srpskom i engleskom jeziku daju se ključne reči (do deset). To je jezgrovit prikaz celog članka i čitaocima omogućuje uvid u njegove bitne elemente.

Rukopis se deli na poglavlja i potpoglavlja uz numeraciju, po hijerarhiji, arapskim brojevima. Svaki rad ima uvod, sadržinu rada sa rezultatima, analizom i zaključcima. Na kraju rada se daje popis literature.

Kod svih dimenzionalnih veličina obavezna je primena međunarodnih SI mernih jedinica.

Formule i jednačine treba pisati pažljivo vodeći računa o indeksima i eksponentima. Autori uz izraze u tekstu definišu simbole redom kako se pojavljuju, ali se može dati i posebna lista simbola u prilogu.

Prilozi (tabele, grafikoni, sheme i fotografije) rade se u crno-belom tehničkom, u formatu koji obezbeđuje da pri smanjenju na razmere za štampu, po širini jedan do dva stupca (8cm ili 16.5cm), a po visini najviše 24.5cm, ostanu jasni i čitljivi, tj. da veličine slova i brojeva budu najmanje 1.5mm. Originalni crteži treba da budu kvalitetni i u potpunosti pripremljeni za presnimavanje. Mogu biti i dobre, oštre i kontrastne fotokopije. Koristiti fotografije, u crno-belom tehničkom, na kvalitetnoj hartiji sa ostrim konturama, koje omogućuju jasnu reprodukciju. Skraćenice u prilogima koristiti samo izuzetno uz obaveznu legendu. Prilozi se posebno označavaju arapskim brojevima, prema redosledu navođenja u tekstu. Objašnjenje tabela daje se u tekstu.

Potrebno je dati spisak svih skraćenica korišćenih u tekstu.

U popisu literature na kraju rada daju se samo oni radovi koji se pominju u tekstu. Citirane radove treba prikazati po azbučnom redu prezimena prvog autora. Literaturu u tekstu označiti arapskim brojevima u uglastim zagradama, kako se navodi i u Popisu citirane literature, napr [1]. Svaki citat u tekstu mora se naći u Popisu citirane literature i obrnuto svaki podatak iz Popisa se mora navesti u tekstu.

U Popisu literature se navode prezime i inicijali imena autora, zatim potpuni naslov citiranog članka, iza toga sledi ime časopisa, godina izdavanja i početna i završna stranica (od - do). Za knjige iza naslova upisuje se ime urednika (ako ih ima), broj izdanja, prva i poslednja stranica poglavlja ili dela knjige, ime izdavača i mesto objavljivanja, ako je navedeno više gradova navodi se samo prvi po redu. Kada autor citirane podatke ne uzima iz izvornog rada, već ih je pronašao u drugom delu, uz citat se dodaje «citirano prema...». Neobjavljeni članci mogu se pominjati u tekstu kao «usmeno saopštenje».

Autori su odgovorni za izneseni sadržaj i moraju sami obezbediti eventualno potrebne saglasnosti za objavljivanje nekih podataka i priloga koji se koriste u radu.

Ukoliko rad bude prihvaćen za štampu, autori su dužni da, po uputstvu Redakcije, unesu sve ispravke i dopune u tekstu i prilogima.

Za detaljnija tehnička uputstva za pripremu rukopisa autori se mogu obratiti Redakcionom odboru časopisa.

Rukopisi i prilozi objavljenih radova se ne vraćaju. Sva eventualna objašnjenja i uputstva mogu se dobiti od Redakcionog odbora.

Radovi se mogu slati i na e-mail: [folic@uns.ac.rs](mailto:folic@uns.ac.rs) ili [miram@uns.ac.rs](mailto:miram@uns.ac.rs) i [dimk@ptt.rs](mailto:dimk@ptt.rs)

Web sajt Društva i časopisa: [www.dimk.rs](http://www.dimk.rs)

\* Uputstvo autorima je modifikovano i treba ga, u pripremi radova, slediti.

Izdavanje časopisa "Građevinski materijali i konstrukcije" finansijski su pomogli:



**INŽENJERSKA KOMORA SRBIJE**

**MINISTARSTVO ZA NAUKU I TEHNOLOŠKI  
RAZVOJ SRBIJE**



**UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**



**DEPARTMAN ZA GRAĐEVINARSTVO  
FAKULTET TENHIČKIH NAUKA NOVI SAD**



**INSTITUT IMS AD, BEOGRAD**



**UNIVERZITET CRNE GORE  
GRAĐEVINSKI FAKULTET - PODGORICA**